Einführung in die Informatik 2

– Sortieren –

Sven Kosub

AG Algorithmik/Theorie komplexer Systeme
Universität Konstanz

E 202 | Sven.Kosub@uni-konstanz.de | Sprechstunde: Freitag, 12:30-14:00 Uhr, o.n.V.

Sommersemester 2009

Einleitung und Problemstellung

Aufgabe: Sortiere Folge F von Elementen aufsteigend (bzw. absteigend)

Klassifikation elementarer Sortierverfahren:

- greedy
- divide-and-conquer

Implementierung der Folgen als:

- Reihungen (*array*)
- Listen (*linked list*)

Gütekriterien von Sortieralgorithmen:

- Laufzeit
  - Anzahl der Vergleiche von Folgenelementen
  - Asymptotik
- (zusätzlicher) Speicherplatz
  - Bevorzugung von Strategien „in place“(bei Reihungen)
  - Platz für Parameter und Variablen (bei Rekursionen)

Reihungen vs. Listen

Aufgabe: Überführe unsortierte Folge F in sortierte Folge S

Implementierung der Folgen F, S als Listen:

- Vorteil: Elemente von F nach S überführen durch Umketten (kein zusätzlicher Speicher)
- Nachteil: kein direkter Zugriff auf Folgenelemente

Implementierung der Folgen F, S als Reihungen:

- Vorteil: direkter Zugriff auf Folgenelemente
- Nachteil: Schrumpfen von F und Wachsen von S zunächst zeit- und speicherplatzaufwändig

Elementare Sortierverfahren: *greedy*

Selection Sort: Sortieren durch Auswahl

- Finde kleinstes Element a von F
- Füge a am Ende von S ein

Insertion Sort: Sortieren durch Einfügen

- Nehme erstes Element a aus F heraus
- Füge a an die richtige Position in S ein

Elementare Sortierverfahren: *divide-and-conquer*

Quicksort

- Teile F in Teilfolgen F_1 und F_2, wobei Elemente von F_1 kleiner sind als Elemente von F_2
- Sortiere Teilfolgen F_1 und F_2 rekursiv
- Füge sortierte Teilfolgen zusammen

Mergesort: Sortieren durch Mischen

- Teile F in Teilfolgen F_1 und F_2
- Sortiere Teilfolgen F_1 und F_2 rekursiv
- Füge sortierte Teilfolgen zusammen durch iteratives Anhängen des kleineren der jeweils ersten Elemente von F_1 und F_2

Generische Implementierung von Sortierverfahren

- Algorithmen „parametrisiert“ durch Vergleichsoperator
- Interface `Comparable` im Paket `java.lang` mit Methode `compareTo`:

$$\texttt{a.compareTo(b)} < 0 \iff a < b$$
$$\texttt{a.compareTo(b)} = 0 \iff a = b$$
$$\texttt{a.compareTo(b)} > 0 \iff a > b$$

```
public class MyInteger implements Comparable<MyInteger> {
  int data;
  public int compareTo(MyInteger obj){
    if (this.data<obj.data) return(-1);
    if (this.data==obj.data) return(0);
    return(1);
  }
}
```

Selection Sort

Idee: Solange F nicht leer ist, finde kleinstes Element a von F und füge a am Ende von S ein

Sortiere $F = (21, 5, 3, 1, 17)$ aufsteigend:

$$F_0 = (21, 5, 3, \mathbf{1}, 17) \qquad S_0 = ()$$
$$F_1 = (21, 5, 3, 17) \qquad S_1 = (\mathbf{1})$$

$$F_1 = (21, 5, \mathbf{3}, 17) \qquad S_1 = (1)$$
$$F_2 = (21, 5, 17) \qquad S_2 = (1, \mathbf{3})$$

$$F_2 = (21, \mathbf{5}, 17) \qquad S_2 = (1, 3)$$
$$F_3 = (21, 17) \qquad S_3 = (1, 3, \mathbf{5})$$

$$F_3 = (21, \mathbf{17}) \qquad S_3 = (1, 3, 5)$$
$$F_4 = (21) \qquad S_4 = (1, 3, 5, \mathbf{17})$$

$$F_4 = (\mathbf{21}) \qquad S_4 = (1, 3, 5, 17)$$
$$F_5 = () \qquad S_5 = (1, 3, 5, 17, \mathbf{21})$$

Selection Sort: Implementierung als Liste (in Java)

```
public class OrderedList {
  // Verwende: public class Node {Object data; Node next; }
  private Node head;
  // Implementiere findMin(): Rückgabe ist Element mit kleinstem Wert
  public Node findMin() { ... };
  // Implementiere deleteElem: Entferne Element a aus Liste
  public void deleteElem(Node a) { ... };
  // Implementiere insertLast: Hänge Element a an Liste an
  public void insertLast(Node a) { ... };

  public OrderedList selectionSort() {
    Node min;
    OrderedList newList = new OrderedList();
    while (head != null) {
      min = findMin();
      deleteElem(min);
      newList.insertLast(min);
    }
  return(newList);
  }
}
```

Selection Sort: Implementierung als Liste (Beurteilung)

Anzahl der Vergleiche:

- findMin benötigt $i - 1$ Vergleiche bei i Elementen in der Liste
- deleteElem und insertLast benötigen keine Vergleiche
- while-Schleife wird n-mal durchlaufen bei anfänglich n Elementen in der Liste
- insgesamt:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

Selection Sort: Implementierung als Reihung (in Java)

```
public class OrderedArray {
  Comparable[] data;
  // Implementiere findMin: Rückgabe ist Index des kleinsten Elementes
  public int findMin(int left, int right) { ... };
  // Implementiere swap: Vertausche zwei Elemente des Arrays
  public void swap(int a, int b) { ... };

  public void selectionSort() {
    int min;
    for (int next=0; next < data.length-1; next++) {
      min = findMin(next,data.length-1);
      swap(next,min);
    }
  }
}
```

Selection Sort: Implementierung als Reihung (Beurteilung)

Anzahl der Vergleiche:

- findMin benötigt $i - 1$ Vergleiche bei i Elementen in der Reihung
- swap benötigt keine Vergleiche
- for-Schleife wird n-mal durchlaufen bei n Elementen in der Reihung
- insgesamt:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) = O(n^2)$$

Beachte: Sortierung erfolgt *in place*

Insertion Sort

Idee: Solange F nicht leer ist, nehme erstes Element aus F und füge es an die richtige Position in S ein

Sortiere $F = (21, 5, 3, 1, 17)$ aufsteigend:

$$F_0 = (21, 5, 3, 1, 17) \qquad S_0 = ()$$
$$F_1 = (5, 3, 1, 17) \qquad S_1 = (21)$$

$$F_1 = (5, 3, 1, 17) \qquad S_1 = (21)$$
$$F_2 = (3, 1, 17) \qquad S_2 = (5, 21)$$

$$F_2 = (3, 1, 17) \qquad S_2 = (5, 21)$$
$$F_3 = (1, 17) \qquad S_3 = (3, 5, 21)$$

$$F_3 = (1, 17) \qquad S_3 = (3, 5, 21)$$
$$F_4 = (17) \qquad S_4 = (1, 3, 5, 21)$$

$$F_4 = (17) \qquad S_4 = (1, 3, 5, 21)$$
$$F_5 = () \qquad S_5 = (1, 3, 5, 17, 21)$$

Insertion Sort: Implementierung als Liste (in Java)

```
public class OrderedList {
  // Verwende: public class Node {Object data; Node next; }
  private Node head;
  // Implementiere takeFirst: Nehme erstes Element aus F heraus
  public Node takeFirst() { ... };
  // Implementiere insertSorted: Füge Element a an richtiger Postion ein
  public void insertSorted(Node a) { ... };

  public OrderedList insertionSort() {
    Node first;
    OrderedList resList = new OrderedList();
    while (head != null) {
      first = takeFirst();
      resList.insertSorted(first);
    }
    return(resList);
  }
}
```

Insertion Sort: Implementierung als Liste (Beurteilung)

Anzahl der Vergleiche:

- takeFirst benötigt keine Vergleiche
- insertSorted benötigt maximal i Vergleiche bei i Elementen in der Liste vor dem Einfügen
- while-Schleife wird n-mal durchlaufen bei anfänglich n Elementen in der Liste
- insgesamt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

Insertion Sort: Implementierung als Reihung (in Java)

```
public class OrderedArray {
  Comparable[] data;
  // Implementiere insertSorted: Füge Element richtig in sortiertem
  // Array-Bereich ein und verschiebe Bereich rechts von der
  // Einfügeposition um eine Position nach rechts
  public void insertSorted(Comparable data, int left, int right)
    { ... };
  public void insertionSort() {
    for (int first=1; first < data.length; first++) {
      insertSorted(data[i],0,i-1);
    }
  }
}
```

Insertion Sort: Implementierung als Reihung (Beurteilung)

Anzahl der Vergleiche:

- insertSorted benötigt maximal $1 + \log i$ Vergleiche für binäre Suche bei i Elementen im Array-Bereich vor dem Einfügen
- for-Schleife wird $(n-1)$-mal durchlaufen bei n Elementen in der Reihung
- insgesamt:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(1 + \log i) = O(n \log n)$$

Vorsicht: Anzahl der Vergleiche nur halbe Wahrheit

- insertSorted benötigt zusätzlich bis zu n Rechtsverschiebungen
- Damit: $O(n^2)$ Zugriffe auf Feldelemente, d.h. quadratische Laufzeit

Beachte: Sortierung erfolgt *in place*

Divide-and-Conquer-Ansätze beim Sortieren

Divide-and-Conquer-Prinzip:

- Teile das Problem (*divide*)
- Löse die Teilprobleme (*conquer*)
- Kombiniere die Lösungen der Teilprobleme (*join*)

Ausprägungen beim Sortieren:

- Hard split/easy join:
  - gesamter Aufwand beim Teilen des Problems F in F_1 und F_2
  - Kombination trivial, d.h., S ist Konkatenation von S_1 und S_2
  - Prinzip von Quicksort
- Easy split/hard join:
  - Teilen des Problems F in F_1 und F_2 trivial
  - gesamter Aufwand beim Kombinieren von S_1 und S_2 zu S
  - Prinzip von Mergesort

Quicksort

1961 von Sir Charles Anthony Richard Hoare veröffentlicht:

- C. A. R. Hoare: Algorithm 63: partition. *Communications of the ACM*, **4**(7):321, 1961.
- C. A. R. Hoare: Algorithm 63: Quicksort. *Communications of the ACM*, **4**(7):321, 1961.

Prinzip:

- Wähle und entferne Pivotelement p aus F
- Zerlege F in F_1 und F_2 mit $a < p \leq b$ für alle $a \in F_1$ und $b \in F_2$
- Sortiere rekursiv F_1 zu S_1 und F_2 zu S_2
- Kombiniere Gesamtlösung als $S_1 p S_2$

Quicksort

Realisierung des Aufteilungsschrittes (partition):

- Für Zerlegung in F_1 und F_2 ist p mit jedem Element von $F \setminus \{p\}$ zu vergleichen
- Zerlegung durch Vertauschung von Elementen *in place*
- Wähle rechtestes Element von F als Pivotelement p
- Bestimme kleinstes i mit $F[i] \geq p$
- Bestimme größtes j mit $F[j] < p$ (sonst setze $j = -1$)
- Paar $F[i]$ und $F[j]$ steht „falsch“; vertausche $F[i]$ mit $F[j]$
- Terminierung (ohne Vertauschung!), wenn erstmals $i > j$ gilt, sonst Wiederholung der letzten drei Schritte
- Vertausche p mit linkem Rand von F_2, d.h. mit $F[i]$

Quicksort

Teile Folge $F = (9, 3, 6, 7, 2, 8, 1, 5)$ auf:

$$(9, 3, 6, 7, 2, 8, 1, 5)$$

$$(9, 3, 6, 7, 2, 8, 1, 5)$$
$$(1, 3, 6, 7, 2, 8, 9, 5)$$

$$(1, 3, 6, 7, 2, 8, 9, 5)$$
$$(1, 3, 2, 7, 6, 8, 9, 5)$$

$$(1, 3, 2, 7, 6, 8, 9, 5)$$
$$(1, 3, 2, 5, 6, 8, 9, 7)$$

Damit sind die Teilfolgen $F_1 = (1, 3, 2)$ und $F_2 = (6, 8, 9, 7)$.

Quicksort: Implementierung in Java

```
public class OrderedArray {
  Comparable[] data;
  public void quickSort(int left, int right) {
    int i=left; j=right-1;
    // Rekursionsabbruch
    if (left>=right) return;
    // Aufteilungsschritt
    Comparable pivot = data[right];
    while (data[i].compareTo(pivot) < 0) i++;
    while (j>left && data[j].compareTo(pivot) >= 0) j--;
    while (i<j) {
      swap(i,j);
      while (data[i].compareTo(pivot) < 0) i++;
      while (j>left && data[j].compareTo(pivot) >= 0) j--;
    }
    swap(i,right);
    // Rekursionsaufrufe
    quickSort(left,i-1);
    quickSort(i+1,right);
  }
}
```

Quicksort: Beurteilung

Anzahl der Vergleiche:

- Aufteilungsschritt für k Elemente benötigt $k-1$ Vergleiche
- im schlechtesten Fall ist Pivotelement immer Maximum oder Minimum, damit n Rekursionsebenen:

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

- im besten Fall wird Reihung genau in der Mitte geteilt (Pivotelement ist der Median), dann gilt für $n = 2^k$:

$$\begin{aligned} T_{\text{best}}(n) &= T_{\text{best}}(2^k) \leq n + 2 \cdot T_{\text{best}}(2^{k-1}) \\ &\leq n + 2 \cdot \left(\frac{n}{2} + 2 \cdot T_{\text{best}}(2^{k-2})\right) = 2n + 4 \cdot T_{\text{best}}(2^{k-2}) \\ &\leq \cdots \leq k \cdot n + 2^k \cdot T_{\text{best}}(2^0) = k \cdot n + n \cdot c \\ &= n \cdot \log n + c \cdot n = O(n \cdot \log n) \end{aligned}$$

Quicksort: Beurteilung

- im Mittel benötigt Quicksort $O(n \cdot \log n)$ Vergleiche
- praktische Güte des Verfahren hängt ab von Wahl des Pivotelementes: Median-von-Drei-Quicksort
- Sortierung erfolgt *in place*
- für Rekursionen $O(n)$ zusätzlicher Speicherplatz im schlechtesten Fall und $O(\log n)$ Speicherplatz im besten und im mittleren Fall
- in Praxis schneller als viele Sortierverfahren mit Worst-Case-Komplexität $O(n \cdot \log n)$

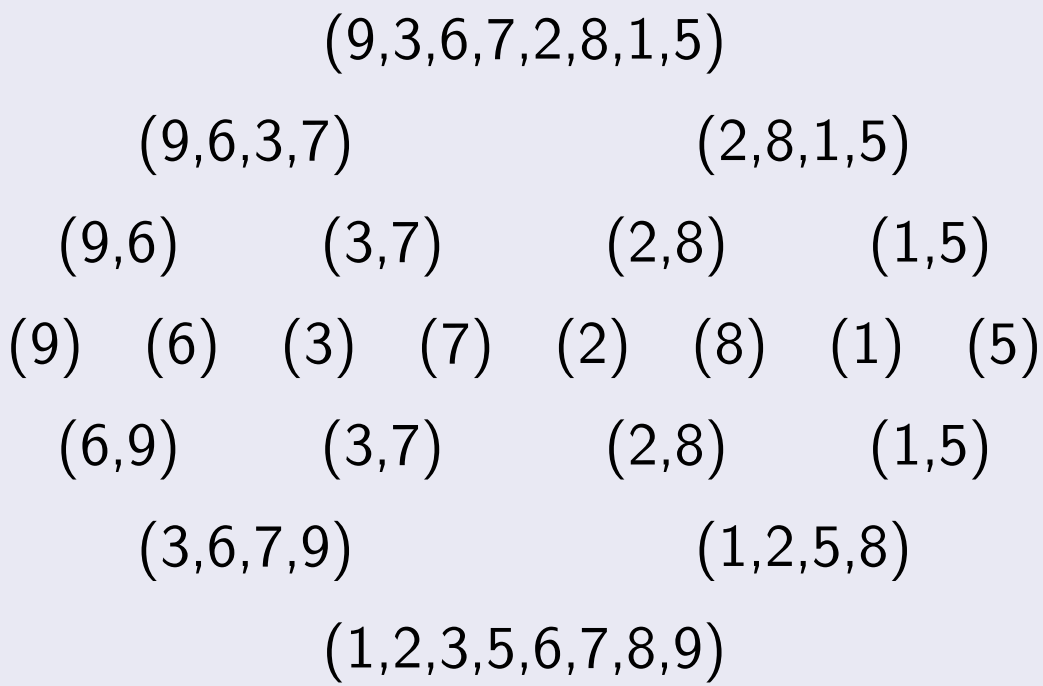
Quicksort ist einer der besten und meist genutzten Sortieralgorithmen

Mergesort

Prinzip:

- Teile F in Teilfolgen F_1 und F_2
- Sortiere Teilfolgen F_1 und F_2 rekursiv
- Füge sortierte Teilfolgen zusammen durch iteratives Anhängen des kleineren der jeweils ersten Elemente von F_1 und F_2

Sortiere Folge $F = (9, 3, 6, 7, 2, 8, 1, 5)$ aufsteigend:



Mergesort: Implementierung in Java

```
public class OrderedList {
  // Verwende: public class Node {Comparable data; Node next; }
  Node head;
  int length;
  public void mergeSort() {
    OrderedList aList=new OrderedList();
    OrderedList bList=new OrderedList();
    Node aChain, bChain, tmp;
    if ( (head==null) || (head.next==null) || length=1 ) return;
    aChain=head;
    tmp=head;
    for (int i=0; i<(length-1)/2; i++) tmp=tmp.next;
    bChain=tmp.next;
    aList.head=aChain; aList.length=length/2;
    bList.head=bChain; bList.length=length-a.List.length;
    aList.mergeSort();
    bList.mergeSort();
    merge(aList,bList);
  }
  :
```

Mergesort: Implementierung in Java

```
  ⋮
  private void merge(OrderedList a, OrderedList b) {
    Node tmp;
    if (a.head==null) { head=b.head; length=b.length; return; }
    if (b.head==null) { head=a.head; length=a.length; return; }
    if (a.head.data.compareTo(b.head.data)>0)
                                  { head = b.head; b.head = b.head.next; }
    else { head=a.head; a.head=a.head.next }
    tmp=head;
    while (a.head != null && b.head != null) {
      if (a.head.data.compareTo(b.head.data)>0)
                               { tmp.next = b.head; b.head = b.head.next; }
      else { tmp.next=a.head; a.head=a.head.next }
      tmp=tmp.next;
    }
    if (a.head==null) tmp.next = b.head;
    else tmp.next=a.head;
    length=a.length+b.length;
  }
}
```

Mergesort: Beurteilung

Anzahl der Listenzugriffe (zur Vereinfachung $n = 2^k$ Elemente in Liste):

- Halbieren der Liste benötigt $n/2$ Listenzugriffe
- Mischen zweier Listen der Größen n und m benötigt maximal $n + m - 1$ Vergleiche und damit $O(n)$ Listenzugriffe auf jeder Rekursionsebene (unabhängig von Listenzahl)
- auf jeder Rekursionsebene verdoppelt sich die Anzahl der Listen, damit k Rekursionsebenen
- insgesamt: $O(n \cdot \log n)$ Listenzugriffe im schlechtesten Fall

Beachte:

- $O(\log n)$ zusätzlicher Speicher für Rekursionen notwendig (besser: iterativer Mergesort)
- $O(n)$ zusätzlicher Speicher für gekapselte Zwischenlisten (umgehbar)