Seminar zur Spieltheorie

SS 2009

Kapitel 15: „Cost Sharing“

(Nisan, Roughgarden, Tardos, Vazirani: Algorithmic Game Theory)

Leitung: Prof. Ulrik Brandes

Katharina Wagner

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wer zahlt wem, warum, wie viel? Ziel der kooperativen Spieltheorie ist es, Kooperationen zwischen Agenten, die bereit sind zu kooperieren, durchzusetzen und aufrecht zu erhalten. Eine zentrale Frage hierbei ist, wie der Nutzen, beziehungsweise die Kosten, die durch die Kooperation entstehen, zwischen den Teilnehmern aufgeteilt werden können. Hierbei gilt es vor allem Individuelle- und Gruppenanreize, sowie verschiedene Fairnesseigenschaften zu berücksichtigen. Um diese Frage zu klären, betrachten wir zunächst das Konzept des Kerns. Es liefert uns einen ersten Einblick wie Kosten so aufgeteilt werden können, dass für keinen der Teilnehmer ein Anreiz besteht, von der erzielten Lösung abzuweichen. Anschließend betrachten wir ein weiteres Konzept für kooperative Spiele, den so genannten Shapley-Wert. Er liefert uns eine weitere Möglichkeit, Kosten zwischen den Teilnehmern auf eine „stabile“ Art und Weise aufzuteilen. Zum Schluss zeigen wir noch, dass Cost Sharing-Verfahren, die eine bestimmte Eigenschaft – genannt Kreuz-Monotonie – erfüllen, verwendet werden können, um Verfahren zu entwerfen, welche robust gegen geheime Absprachen sind.

2 Kooperative Spiele und Cost Sharing

Als Ausgangspunkt betrachten wir zunächst immer eine Menge $\mathcal{A}$ bestehend aus n Agenten, welche durch Kooperationen versuchen einen Wert zu erzeugen. Der hierbei erzeugte Wert hängt von den jeweiligen Koalitionen S zwischen den kooperierenden Agenten ab, wobei $S \in \mathcal{A}$.
Die Menge aller möglichen Auskommen, welche durch Kooperationen $S \in \mathcal{A}$ zwischen den Agenten entstehen, bezeichnen wir mit $V(S)$. Jedes Auskommen ist durch einen Vektor im $\mathbb{R}^S$ gegeben, dessen i-te Komponente den Nutzen des Agenten $i \in S$ in diesem Auskommen angibt.

Definition 2.1: (NTU-Spiele)
Die Agentenmenge $\mathcal{A}$ zusammen mit der Funktion V definiert ein so genanntes kooperatives Spiel mit nicht übertragbaren Nutzen (nontransferable utilities).

Definition 2.2: (TU-Spiel)
Ein kooperatives Spiel mit übertragbaren Nutzen (transferable utilities) liegt vor, wenn der durch die Koalition S erzeugte Wert beliebig zwischen den Agenten in S aufgeteilt werden kann. (Spezialfall eines NTU-Spiels)
Ein TU-Spiel ist damit durch folgende Angaben definiert:

υ :	mit $\upsilon : 2^{\mathcal{A}} \longmapsto \mathbb{R}$
$\upsilon(S) \in \mathbb{R}$:	Wert der durch die Koalition S erzeugt wird;
	$\upsilon(\emptyset) = 0$
$V(S)$:	Menge der möglichen Auskommen, mit

$$V(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} x_i \leq \upsilon(S) \right\}.$$

D.h., die Menge alle möglichen Auskommen einer Koalition S ist gegeben durch die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^S$, deren aufsummierte Komponenten den Gesamtwert $\upsilon(S)$ der Koalition nicht überschreiten.

Bei kooperativen Spielen versucht man, sich auf die Bildung von Koalitionen und deren Auswirkungen zu beschränken, und alle anderen Aspekte des Spiels außer Acht zu lassen. Wohingegen der Focus bei nicht-kooperativen Spielen auf den Wahlmöglichkeiten jedes Agenten liegt.
Des Weiteren beschränken wir uns in einem kooperativen Spiel nicht darauf, dass die erzeugten Werte nicht-negativ sein müssen. Vielmehr beschreibt der Fall, in dem alle Werte nicht-positiv sind, die Aufgabe des Cost Sharing. Er entspricht dem Problem der Teilung von Kosten für eine Leistung, auf die Empfänger dieser Leistung.
Das Problem der Kostenverteilung kann sowohl in TU-, als auch in NTU-Modellen untersucht werden.

Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden ausschließlich TU-Spiele.

Ein Beispiel, das wir immer wieder zur Veranschaulichung benutzen werden, ist das facility location-Spiel.

Definition 2.3: (facility location-Spiel)

In einem facility location-Spiel sind gegeben:

$\mathcal{A}$:	Menge der Agenten
$\mathcal{F}$:	Menge der Anlagen (facilities)
f_i :	Öffnungskosten jeder Anlage $i \in \mathcal{F}$
d_{ij} :	Verbindungskosten zwischen Agent i und Anlage j
c :	Kostenfunktion.

Für eine Menge $S \subseteq \mathcal{A}$ von Agenten sind die Kosten dieser Menge definiert, als die minimalen Kosten für die Öffnung einer Menge von Anlagen und der Verbindung aller Agenten in S mit einer geöffneten Anlage.

Die Kostenfunktion c ist demnach definiert durch:

$$c(S) = \min_{\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{F}'} f_i + \sum_{j \in S} \min_{i \in \mathcal{F}'} d_{ij} \right\}.$$

Zur Veranschaulichung betrachten wir nun ein Beispiel eines einfachen facility location-Spiels, und berechnen die Kosten aller möglichen Koalitionen.

Beispiel 2.1:

Wir betrachten ein Spiel mit 3 Agenten, $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$, und 2 Anlagen, $\mathcal{F} = \{1, 2\}$. Die Distanzen zwischen einigen Paaren sind in Abbildung 1 angegeben.

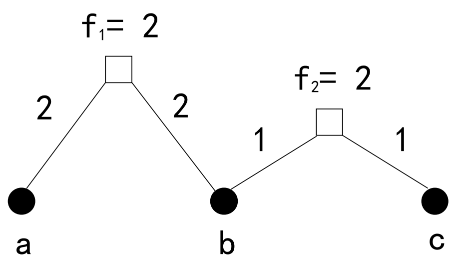

Abbildung 1: facility location-Spiel

Als Beispiel zur Berechnung der Distanz betrachten wir Anlage 1 und Agent c.
Die Distanz zwischen ihnen beträgt: $d_{1c} = 2 + 1 + 1 = 4.$
Die Kostenfunktion nimmt in diesem Beispiel folgende Werte an:

$$c(\{a\}) = 2 + 2 = 4 \qquad c(\{a,b\}) = 2 + (2 + 2) = 6$$
$$c(\{b\}) = 2 + 1 = 3 \qquad c(\{b,c\}) = 2 + (1 + 1) = 4$$
$$c(\{c\}) = 2 + 1 = 3 \qquad c(\{a,c\}) = (2 + 2) + (2 + 1) = 7$$
$$c(\{a,b,c\}) = (2 + 2) + (2 + 1 + 1) = 8$$

Nachdem wir uns jetzt einen kurzen Überblick über kooperative Spiele verschafft haben, kommen wir nun zu einem Konzept, das uns hilft die Frage zu beantworten, wie die Kosten sinnvoll aufgeteilt werden können.

3 Der Kern

Der Kern eines kooperativen Spiels ist, grob gesagt, die Menge aller Auskommen, für die Menge von Agenten, in denen keine Koalition ein Interesse daran hat, von der großen Koalition abzuweichen. Intuitiv entspricht der Kern eines Spiels also jenen Situationen, in denen es möglich ist – auf eine ökonomisch stabile Weise – Kooperationen zwischen allen Agenten herbeizuführen.
Wir definieren zunächst den Begriff des Kerns für kooperative Cost Sharing-Spiele und zeigen anschließend, wie er für TU-Spiele gelockert werden kann, indem wir eine approximative Version des Kerns angeben. Zum Schluss zeigen wir, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit der Kern eines Spiels nicht leer ist.

3.1 Der Kern von TU-Spielen

Der Kern von TU-Spielen ist wie folgt definiert:

Definition 3.1: (Kern)
Sei $(\mathcal{A}, c)$ ein TU-Cost Sharing-Spiel mit Agentenmenge $\mathcal{A}$ und Kostenfunktion c. Ein Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ (auch Kostenallokation genannt), dessen Komponenten die Verteilung der Kosten auf die einzelnen Agenten angibt, liegt im Kern des Spiels $(\mathcal{A}, c)$, falls er folgende Bedingungen erfüllt:

- Budget-balance: $\sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j = c(\mathcal{A})$
  (d.h., wenn die Gesamtkosten gedeckt sind),
- Kerneigenschaft: $\forall\, S \subseteq \mathcal{A} : \sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S)$
  (d.h., kein Agent muss durch die Koalition mehr Kosten tragen, als seine Einzelkosten betragen würden, wenn er nicht kooperiert).

Folgendes Beispiel soll obige Definition verdeutlichen:

Beispiel 3.1: (facility location-Spiel)
Wir betrachten erneut das Beispiel aus Abbildung 1, mit 3 Agenten, $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$, und 2 Anlagen, $\mathcal{F} = \{1, 2\}$. Die Kosten sind wie folgt berechnet worden:

$$\begin{array}{llll} c(\{a\}) = 4 & c(\{b\}) = 3 & c(\{c\}) = 3 & c(\{a,b,c\}) = 8 \\ c(\{a,b\}) = 6 & c(\{b,c\}) = 4 & c(\{a,c\}) = 7. & \end{array}$$

Wir zeigen nun, dass der Vektor $\alpha = (4, 2, 2)$ im Kern dieses Spiels liegt.
Hierfür wird gezeigt, dass die Gesamtkosten $c(\mathcal{A})$, durch diese Verteilung der Kosten, gedeckt sind:

$$\text{Budget-balance:} \quad \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j = 4 + 2 + 2 = 8 = c(\{a, b, c\}) = c(\mathcal{A}).$$

Außerdem muss gezeigt werden, dass sich in jeder möglichen Koalition keiner der Agenten schlechter stellt, als im Fall ohne Koalitionsbildung.

Als Beispiel betrachten wir die Koalition $S = \{a, c\}$:

$$\text{Kerneigenschaft:} \quad \sum_{j \in S} \alpha_j = 4 + 2 = 6 \leq 7 = c(\{a, c\}).$$

Da man dies für alle möglichen Koalitionen zeigen kann, liegt der Verteilungsvektor $\alpha = (4, 2, 2)$ somit per Definition im Kern dieses Spiels.

Analog kann gezeigt werden, dass auch der Vektor $\alpha = (4, 1, 3)$ im Kern des Spiels liegt. Demzufolge muss der Kern eines Spiels nicht eindeutig sein.

Betrachten wir nun eine Erweiterung des obigen facility location-Spiels:

Beispiel 3.2:

Zu den bereits vorhandenen Anlagen wird nun eine dritte Anlage hinzugefügt. Diese neue Anlage hat Öffnungskosten $f_3 = 3$ und Verbindungskosten $d_{3a} = d_{3c} = 1$.

Das Spiel lässt sich also wie folgt graphisch darstellen:

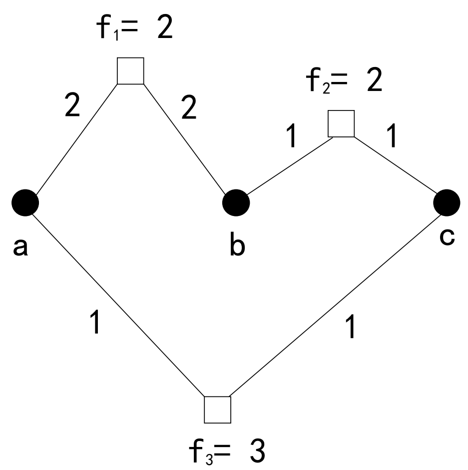

Abbildung 2: erweitertes facility location-Spiel

Das Spiel besteht demnach aus 3 Agenten, $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$, und 3 Anlagen, $\mathcal{F} = \{1, 2, 3\}$. Die Kostenfunktion nimmt folgende Werte an:

$$\begin{array}{llll} c(\{a\}) = 4 & c(\{b\}) = 3 & c(\{c\}) = 3 & c(\{a, b, c\}) = 8 \\ c(\{a, b\}) = 6 & c(\{b, c\}) = 4 & c(\{a, c\}) = 5. & \end{array}$$

Die einzigen Kosten, welche sich durch die Erweiterung verändert haben, sind die Kosten der Koalition $S = \{a, c\}$. Diese fallen von $c(\{a, c\}) = 7$ auf $c(\{a, c\}) = 5$. Welche Auswirkung hat diese Veränderung auf den Kern des Spiels?
Falls es einen Vektor α im Kern des Spiels gibt, dann muss die Kerneigenschaft erfüllt sein. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \alpha_a + \alpha_b &\leq c(\{a, b\}) &&= 6 \\ \alpha_b + \alpha_c &\leq c(\{b, c\}) &&= 4 \\ \alpha_a + \alpha_c &\leq c(\{a, c\}) &&= 5. \end{aligned}$$

Durch Addition obiger Ungleichungen und Division beider Seiten durch zwei erhält man:

$$\begin{aligned} 2\alpha_a + 2\alpha_b + 2\alpha_c &\leq 15 \\ \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c &\leq 7,5. \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zur Eigenschaft der Budget-balance, wonach gelten muss:

$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c = 8 = c(\{a, b, c\}) = c(\mathcal{A}).$$

Somit ist der Kern dieses Spiels leer.

3.2 Approximativer Kern

Wie wir in Beispiel 3.2 gezeigt haben, kann der Kern eines Cost Sharing-Spiels auch leer sein. Des Weiteren ist die zugrunde liegende Kostenfunktion c oft schwer zu berechnen und damit die Entscheidung, ob der Kern eines Spiels leer ist, rechnerisch nur sehr schwer zu treffen. Aus diesem Grund kommen wir jetzt zu einer Erweiterung des Kernbegriffs, dem so genannten γ-approximativen Kern eines Spiels.

Definition 3.2: (γ-approximativer Kern)

Ein Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ (auch Kostenallokation genannt) liegt im γ-approximativen Kern des Spiels $(\mathcal{A}, c)$, falls er folgende Bedingungen erfüllt:

- γ-Budget-balance: $\gamma\, c(\mathcal{A}) \leq \sum\limits_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j \leq c(\mathcal{A})$,
- Kerneigenschaft: $\forall\, S \subseteq \mathcal{A} : \sum\limits_{j \in S} \alpha_j \leq c(S)$.

Auch diese Version des Kerns sollen anhand eines Beispiels verdeutlichen werden:

Beispiel 3.3:

Betrachten wir erneut das Bespiel aus Abbildung 2.

Es gilt: $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \{1, 2, 3\}$ und die Kosten sind wie folgt gegeben:

c({a}) = 4	c({b}) = 3	$c(\{c\}) = 3$	c({a,b,c}) = 8
c({a,b}) = 6	c({b,c}) = 4	c({a,c}) = 5.	

Wie in Beispiel 3.2 gezeigt, gilt:

$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \leq 7,5.$$

Indem die γ-Budget-balance, sowie die Kerneigenschaft nachwiesen wird, kann gezeigen werden, dass der Vektor $\alpha = (3,5\ ;\ 2,5\ ;\ 1,5)$ im $\frac{7,5}{8}$-Kern des Spiels liegt.

Aus obigem Beispiel wissen wir, dass der Kern aufgrund der folgenden Gleichung leer ist: $\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \leq 7,5$.

Dieses Argument zeigt auch, dass für jedes $\gamma > \frac{7,5}{8}$ der γ-Kern des Spiels leer sein muss.

3.3 Satz von Bondareva-Shapley

Wir haben gesehen, dass der Kern eines Spiels sowohl mehrere Vektoren enthalten, als auch leer sein kann. Rechnerisch ist es oft nicht einfach herauszufinden, welcher

Fall auf ein gegebenes Spiel zutrifft. Der Satz von Bondareva-Shapley liefert uns eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Kern eines Spiels nicht leer ist. Um den Satz angeben zu können, ist zunächst folgende Definition notwendig:

Definition 3.3: („balanced collection of weights“)

Ein Vektor λ, der jeder Teilmenge $S \subseteq \mathcal{A}$ ein nicht-negatives Gewicht λ_S zuweist, heißt „balance collection of weights“, wenn für alle $i \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\sum_{S:i \in S} \lambda_S = 1.$$

Beispiel 3.4:

Betrachten wir die Agentenmenge $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$.

Es ist leicht zu zeigen, dass λ, mit $\lambda_{\{a,b\}} = \lambda_{\{b,c\}} = \lambda_{\{a,c\}} = \frac{1}{2}$ und $\lambda_S = 0$ für alle anderen Teilmengen $S \subseteq \mathcal{A}$, eine „balanced collection of weights“ ist:

$$\begin{aligned}
\sum_{S:\{a\} \in S} &= \lambda_{\{a,b\}} + \lambda_{\{a,c\}} &&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \\
\sum_{S:\{b\} \in S} &= \lambda_{\{a,b\}} + \lambda_{\{b,c\}} &&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \\
\sum_{S:\{c\} \in S} &= \lambda_{\{a,c\}} + \lambda_{\{b,c\}} &&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Definition kann nun der Satz von Bondareva-Shapley folgendermaßen formuliert werden:

Satz 3.1: (Bondareva-Shapley)

Der Kern eines Cost Sharing-Spiels $(\mathcal{A}, c)$ mit übertragbaren Nutzen (TU-Spiel) ist genau dann nicht leer, wenn für jede „balanced collection of weights“ λ gilt:

$$\sum_{S \subseteq \mathcal{A}} \lambda_S \, c(S) \geq c(\mathcal{A}).$$

Beweis:

Nach Definition des Kerns hat das Spiel $(\mathcal{A}, c)$ genau dann einen nicht leeren Kern, wenn die Lösung des folgenden linearen Programms (LP) genau $c(\mathcal{A})$ ist.

(Beachte: die Lösung kann nie größer sein als $c(\mathcal{A})$)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j \\ \text{S.t.} & \forall\, S \subseteq \mathcal{A} : \sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S). \end{array}$$

(siehe Kerneigenschaft und Budget-balance)

Die Lösung des obigen LP ist äquivalent zur Lösung des folgenden dualen Problems:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & \sum_{S \subseteq \mathcal{A}} \lambda_S c(S) \\ \text{S.t.} & \forall\, j \in \mathcal{A} : \sum_{S.j \in S} \lambda_S = 1 \\ & \forall\, S \subseteq \mathcal{A} : \lambda_S \geq 0. \end{array}$$

Damit ist der Kern dieses Spiels genau dann nicht leer, wenn die Lösung des dualen Linearen Programms $c(\mathcal{A})$ ist. Per Definition sind zulässige Lösungen des Programms „balanced collections of weights". Daher ist der Kern des Spiels $(\mathcal{A}, c)$ nur dann nicht leer, wenn für jede „balanced collection of weights" (λ_S) gilt:

$$\sum_{S \subseteq \mathcal{A}} \lambda_S c(S) \geq c(\mathcal{A}).$$

4 Der Shapley Wert

Ein Problem des Kernbegriffs liegt darin, dass die Kostenallokationen eines Spiels, und damit auch die Verteilung der Kosten auf die einzelnen Teilnehmer, selten eindeutig sind. Mit anderen Worten: Es liegt nur selten ein einziger Vektor im Kern. Liegt, wie in Beispiel 3.2 gesehen, kein Vektor im Kern eines Spiels, so ist das Kriterium des Kerns nutzlos für die Verteilung der Kosten auf die Agenten. Enthält der Kern mehrere Vektoren, wie in Beispiel 3.1, dann benötigt man weitere Kriterien, um aus diesen Kostenallokationen die „Beste" auszuwählen.

Aus diesem Grund betrachten wir in folgendem Abschnitt ein weiteres Lösungskonzept, den so genannten Shapley Wert. Er weist jedem Cost Sharing-Spiel eine eindeutige Kostenallokation zu.

4.1 Formeller Ansatz

Wir betrachten ein Cost Sharing-Spiel, dass definiert ist durch die Agentenmenge $\mathcal{A}$, bestehend aus n Agenten, und die Kostenfunktion c. Eine einfache Möglichkeit, die Kosten $c(\mathcal{A})$ auf die Agenten zu verteilen, besteht darin, die Agenten in einer bestimmten Reihenfolge – beispielsweise $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – zu ordnen. Innerhalb dieser Ordnung wird jeder Agent mit seinen Grenzkosten belastet. Diese entstehen, wenn er zur „bedienten" Menge hinzugefügt wird.
Mit anderen Worten: Der erste Agent a_1 wird mit seinen Einzelkosten $c(\{a_1\})$ belastet. Der zweite Agent wird mit seinen Grenzkosten, also mit $c(\{a_1, a_2\}) - c(\{a_1\})$ belastet, und so weiter. Diese Methode bezeichnet man auch als „stufenweises" Cost Sharing. Das wesentliche Problem dieser Methode liegt darin, dass hierbei die Ordnung der Agenten eine Rolle spielt. Der Shapley Wert löst dieses Problem, indem er eine zufällige Ordnung wählt. Diese wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus der Menge aller $n!$ möglichen Ordnungen herausgenommen. Jeder Agent wird mit seinen erwarteten Grenzkosten innerhalb dieser Ordnung belastet.
Da für jeden Agenten $i \in \mathcal{A}$ und jede Menge $S \subseteq \mathcal{A} \setminus \{i\}$ mit $|S| = s$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Menge von Agenten, die in einer zufälligen Ordnung vor Agent i kommen, genau die Menge S ist, gegeben ist durch: $\frac{s!(n-1-s)!}{n!}$, kann der Shapley Wert folgendermaßen formell definiert werden: **Definition 4.1:** (Shapley Wert)
Für jeden Agenten $i \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\phi_i(c) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{s!(n-1-s)!}{n!} \sum_{S \subseteq \mathcal{A} \setminus \{i\}, |S|=s} \left[c(S \cup \{i\}) - c(S) \right].$$

$\phi_i(c)$ gibt den Kostenanteil von Agent $i \in \mathcal{A}$ im Cost Sharing-Spiel $(\mathcal{A}, c)$ an.

Wie das folgende Beispiel zeigt, muss die Kostenverteilung, welche durch den Shapley Wert gegeben ist, nicht im Kern des Spiels liegen. Selbst dann nicht, wenn der Kern des Spiels nicht leer ist.

Beispiel 4.1:

Wir betrachten erneut Beispiel 3.1. Für dieses wurde bereits gezeigt, dass der Kern nicht leer ist. Das Spiel ist definiert durch die Agenten $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$, die Anlagen $\mathcal{F} = \{1, 2\}$, die in Abbildung 1 angegebenen Verbindungskosten, sowie den folgenden Kosten:

$$\begin{array}{llll} \text{c}(\{\text{a}\}) = 4 & \text{c}(\{\text{b}\}) = 3 & c(\{c\}) = 3 & \text{c}(\{\text{a,b,c}\}) = 8 \\ \text{c}(\{\text{a,b}\}) = 6 & \text{c}(\{\text{b,c}\}) = 4 & \text{c}(\{\text{a,c}\}) = 7. & \end{array}$$

Der Shapley Wert lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \phi_a &= \tfrac{1}{3} \cdot 4 + \tfrac{1}{6} \cdot 3 + \tfrac{1}{6} \cdot 4 + \tfrac{1}{3} \cdot 4 &&= \tfrac{23}{6}\,, \\ \phi_b &= \tfrac{1}{3} \cdot 3 + \tfrac{1}{6} \cdot 2 + \tfrac{1}{6} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot 1 &&= \tfrac{11}{6}\,, \\ \phi_c &= \tfrac{1}{3} \cdot 3 + \tfrac{1}{6} \cdot 3 + \tfrac{1}{6} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot 2 &&= \tfrac{7}{3}\,. \end{aligned}$$

Somit ist der Shaply Wert gegeben durch: $\phi = \left(\frac{23}{6}, \frac{11}{6}, \frac{7}{3}\right)$.

Der Shapley Wert $\phi = \left(\frac{23}{6}, \frac{11}{6}, \frac{7}{3}\right)$ liegt jedoch nicht im Kern des Spiels, obwohl dieser nicht leer ist. Um dies zu zeigen überprüfen wir die Kerneigenschaft: $\sum\limits_{j \in S} \phi_j \leq c(S)$.
Für die Koalition $S = \{b, c\}$ gilt: $\phi_b + \phi_c = \frac{25}{6} > 4 = c(\{b, c\})$.
Dies steht jedoch im Widerspruch zur Kerneigenschaft.

4.2 Axiomatischer Ansatz

Eine andere Betrachtungsweise liefert der axiomatische Ansatz des Shapley Werts. Demnach ist der Shapley Wert der einzige Wert, der die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

Definition 4.2: (Shapley Wert)

Legt man eine Menge mit n Agenten fest, so ist ein „Wert“ eine Funktion, die jeder Kostenfunktion c einen Vektor $\phi(c) \in \mathbb{R}^n$ mit nicht-negativen Zahlen zuweist.

Folgende drei Eigenschaften von „Werten“ sind definiert:

- *Anonymität:*

  Eine Änderung der Namen der Agenten ändert nicht ihre Kostenanteile.

  Formell: ϕ erfüllt Anonymität $\iff$

  $$\forall\, \pi \wedge\ \forall\, c\ :\ \phi_{\pi_i}(\pi(c)) = \phi_i(c) \quad \forall\, i \in \mathcal{A},$$

  wobei π eine Permutation von $\mathcal{A}$ und c eine Kostenunktion angibt.

- *Dummy:*

  Ein Agent, der nicht zu den Kosten beiträgt, darf auch nicht mit Kosten belastet werden.

  Formell: ϕ erfüllt Dummy-Eigenschaft $\iff$

  $$\forall\, S \subset \mathcal{A} \setminus \{i\}\ :\ c(S) = c(S \cup \{i\}) \implies \phi_i(c) = 0.$$

- *Additivität:*

  Für je zwei Kostenfunktionen c_1 und c_2, deren Summe $c_1 + c_2$ definiert ist durch: $(c_1 + c_2)(S) = c_1(S) + c_2(S)$ gilt: $\phi(c_1 + c_2) = \phi(c_1) + \phi_2(S)$.

  Formell: ϕ erfüllt Additivität $\iff$

  $$\forall\, c_1, c_2\ :\ (c_1 + c_2)(S) = c_1(S) + c_2(S) \Longrightarrow \phi(c_1 + c_2) = \phi(c_1) + \phi_2(S).$$

Satz 4.1:

Der Shapley Wert ist der einzige Wert, der alle drei Eigenschaften (Anonymität, Dummy und Additivität) erfüllt.

5 Wahrheitsgetreue Mechanismen

Das betrachtete Cost Sharing-Problem modelliert die Preisfestsetzung eines Serviceanbieters mit einer gegebenen Menge an Kunden. Ist die Nachfrage stark preisabhängig, so kann der Serviceanbieter eine Auktion mit den potentiellen

Kunden durchführen, um so die Menge der Kunden auszuwählen, die, basierend auf ihrer Zahlungsbereitschaft und der Kostenstruktur des Problems, den Service erhalten sollen. Ziel ist es, einen Auktionsmechanismus zu entwerfen, der sowohl für Individuen, als auch für Gruppen Anreize setzt, wahrheitsgetreu zu bieten.

5.1 Cost Sharing-Mechanismus

Sei $\mathcal{A}$ die Menge bestehend aus n Agenten, welche daran interessiert sind, einen bestimmten Service zu erhalten. Die Bereitstellungskosten für den Service sind gegeben durch eine Kostenfunktion c. Die Kosten zur Bereitstellung des Service für Agenten in S sind demnach gegeben, durch:$c(S)$. Für jeden Agenten $i \in \mathcal{A}$ gibt es einen Wert $u_i \in \mathbb{R}$, welcher angibt, wie viel er höchstens bereit ist für den Service zu bezahlen. Weiter nehmen wir an, dass der Nutzen von Agent i gegeben ist durch: $u_i\, q_i - x_i$. Wobei die Indikatorvariable q_i angibt, ob er den Service erhalten hat, und x_i den Betrag angibt, den er in diesem Fall bezahlen muss.

Definition 5.1: (Cost Sharing-Mechanismus)
Ein Cost Sharing-Mechanismus ist ein Algorithmus, der jedem Agenten ein Angebot u_i entlockt und basierend auf diesen Angeboten entscheidet, welche Agenten den Service erhalten sollten, und wie viel jeder von ihnen zu bezahlen hat. Formeller betrachtet besteht ein Cost Sharing-Mechanismus aus einer Funktion Q, die jedem Angebotsvektor u eine Menge von Agenten $Q(u) \subseteq \mathcal{A}$ zuweist, die den Service erhalten, und einem Zahlungsvektor $p(u) \in \mathbb{R}^n$.

Wir nehmen an, dass ein Mechanismus die folgenden Bedingungen erfüllt:

- *Kein positiver Transfer:*
  Die Zahlungen sind nicht-negativ.
  Formell: $p_i \geq 0 \;\; \forall\, i \in \mathcal{A}$.

- *Freiwillige Teilnahme:*

  Ein Agent der keinen Service erhält, wird auch nicht mit Kosten belastet. Ein Agent der den Service erhält, wird nicht mit mehr als seinem abgegebenen Angebot belastet.

  Formell: $p_i = 0 \; \forall \; i \notin Q(u)$ und $p_i \leq u_i \; \forall \; i \in Q(u)$.

- *Konsumentensouveränität:*

  Für jeden Agenten i gibt es ein Angebot u_i^*. Bietet Agent i den Wert u_i^*, so erhält er den Service, unabhängig davon, was die anderen Teilnehmer bieten.

  Formell: $u = (u_1, \ldots, u_i^*, \ldots, u_n) \Longrightarrow i \in Q(u) \; \forall \; u_s$,

  $$s = 1, \ldots, i-1, i+i, \ldots, n.$$

Außerdem soll der Mechanismus approximativ Budget-balanced sein.

Definition 5.2: (γ-Budget-balanced)

Ein Mechanismus ist γ-Budget-balanced bezüglich der Kostenfunktion c, falls der Gesamtbetrag, welchen der Mechanismus den Agenten anrechnet, zwischen $\gamma \, c(Q)$ und $c(Q)$ liegt, d.h. $\gamma \, c(Q) \leq \sum_{i \in Q} x_i \leq c(Q)$.

Gesuchen werden jene Mechanismen – genannt „gruppen-wahrheitsgetreue“-Mechanismen – die zusätzlich zu den oben genannten Eigenschaften noch folgende weitere Eigenschaft erfüllen:

Definition 5.3: („gruppen-wahrheitsgetreu“)

Sei $S \subseteq \mathcal{A}$ eine Koalition aus Agenten und u bzw. u' zwei Angebotsvektoren, mit $u_i = u'_i$ für alle $i \notin S$. Wir betrachten u als den wahren Angebotsvektor und u' als einen Vektor aus strategisch gewählten Angeboten. (Q, p) bzw. (Q', p') bezeichnen die Auskommen des Mechanismus, wenn die Angebote u bzw. u' sind. Ein Mechanismus ist „gruppen-wahrheitsgetreu“, wenn für jede Koalition S aus Agenten gilt:

$$u_i \, q'_i - p'_i \geq u_i \, q_i - p_i \;\; \forall \; i \in S \quad \Longrightarrow \quad u_i \, q'_i - p'_i = u_i \, q_i - p_i \;\; \forall \; i \in S.$$

D.h., wenn für alle an der Koalition beteiligten Agenten, aus der Ungleichung stets die Gleichheit folgt. Mit anderen Worten: Es darf keine Koalition S und kein Angebotsvektor u' existieren, sodass wenn ein Mitglied aus S statt dem wahren Wert u das Angebot u' abgibt, nicht jedes Mitglied der Koalition S mindestens genauso gut gestellt ist wie im wahren Szenario und mindestens eine Person besser gestellt ist. Es ist also nicht möglich, dass sich ein Individuum durch falsche Angaben, bei gleich bleibender Position der Anderen, verbesser kann.

Man kann zeigen, dass Cost Sharing-Methoden, die eine weitere Eigenschaft – genannt Kreuzmonotonie – erfüllen, verwendet werden können, um „gruppen-wahrheitsgetreue“ Cost Sharing-Mechanismen zu konstruieren. Um diese Eigenschaft zu definieren, mussen zunächst der Begriff eines Cost Sharing-Schemas definiert werden.

Definition 5.4: (Cost Sharing-Schema)
Sei $(\mathcal{A}, c)$ ein Cost Sharing-Spiel. Ein Cost Sharing-Schema ist eine Funktion ξ, die jeder Menge $S \subseteq \mathcal{A}$ eine Kostenallokation für S zuordnet, mit:

$$\xi(i, S) = 0 \quad \forall\, S \subseteq \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \forall\, i \notin S.$$

Ein Cost Sharing-Schema ξ ist γ-budget-balanced, falls:

$$\gamma\, c(S) \leq \sum_{i \in S} \xi(i, S) \leq c(S).$$

Mit Hilfe dieser Definition ist es möglich, die Kreuzmonotonie-Eigenschaft zu definieren. Ihre Idee besteht darin, dass Agenten nicht benachteiligt werden dürfen, wenn die belieferte Menge wächst.

Definition 5.5: (kreuzmonoton)
Ein Cost Sharing-Schema ξ ist kreuzmonoton, falls für alle $S, T \subseteq \mathcal{A}$ und für alle $i \in S$ gilt:

$$\xi(i, S) \geq \xi(i, S \cup T).$$

Die folgende Behauptung zeigt, dass Kreuzmonotonie eine stärkere Eigenschaft ist als der Kern.

Behauptung 5.1:
Sei ξ ein γ-budget-balanced, kreuzmonotones Cost Sharing-Schema für das Cost Sharing-Spiel $(\mathcal{A}, c)$. Dann ist $\xi(\cdot, \mathcal{A})$ im γ-Kern dieses Spiels.

Beweis:
Man muss zeigen, dass $\xi(\cdot, \mathcal{A})$ die Kerneigenschaft erfüllt:

$$\forall\, S \subseteq \mathcal{A} : \sum_{i \in S} \xi(i, \mathcal{A}) \leq c(S).$$

Aufgrund der Kreuzmonotonie gilt für alle $i \in S$:

$$\xi(i, \mathcal{A}) \leq \xi(i, \mathcal{S}).$$

Damit gilt :

$$\sum_{i \in S} \xi(i, \mathcal{A}) \leq \sum_{i \in S} \xi(i, S) \leq c(S),$$

wobei die letzte Ungleichung aus der γ-budget-balanced-Eigenschaft von ξ folgt. Somit ist die Kerneigenschaft erfüllt.

Für ein kreuzmonotones Cost Sharing-Schema ξ für das Cost Sharing-Spiel $(\mathcal{A}, c)$ wird ein Cost Sharing-Mechanismus $\mathcal{M}_\xi$ folgendermaßen definiert:
Mechanismus $\mathcal{M}_\xi$

Initialize	$S \leftarrow \mathcal{A}$.
Repeat	Let $\quad S \leftarrow \{i \in S : u_i \geq \xi(i, S)\}$.
Until	$\forall\, i \in S, u_i \geq \xi(i, S)$.
Return	$Q = S \quad$ and $\quad p_i = \xi(i, S)\ \forall\, i$.

Wobei u_i das Angebot des Agenten $i \in \mathcal{A}$ und p_i den Preis für den erhaltenen Service angibt. Die Menge $Q = Q(u)$ enthält schließlich alle Agenten, die bei gegebenem Cost Sharing-Schema ξ, den Service erhalten.

Die folgende Behauptung liefert eine Alternative, wie der Mechanismus $\mathcal{M}_\xi$ zu verstehen ist.

Behauptung 5.1:
Angenommen ξ ist ein kreuzmonotones Cost Sharing-Schema für das Cost Sharing-Spiel $(\mathcal{A}, c)$ und $u_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ für alle $i \in \mathcal{A}$. Dann gibt es eine eindeutige maximale Menge $S \subseteq \mathcal{A}$, sodass für alle $i \in S$ gilt:

$$u_i \geq \xi(i, S).$$

Der Mechanismus $\mathcal{M}_\xi$ liefert genau diese Menge.

Beweis: (Widerspruchsbeweis)
Angenommen es gibt zwei verschiedene maximale Mengen S_1 und S_2, welche obige Eigenschaft erfüllen. D.h. $u_i \geq \xi(i, S_1)$ für alle $i \in S_1$ und $u_i \geq \xi(i, S_2)$ für alle $i \in S_2$. Dann gilt für alle $i \in S_1$:

$$u_i \geq \xi(i, S_1) \geq \xi(i, S_1 \cup S_2),$$

wobei die zweite Ungleichung aus der Kreuzmonotonie von ξ folgt.
Analog gilt für alle $i \in S_2$:

$$u_i \geq \xi(i, S_2) \geq \xi(i, S_1 \cup S_2).$$

Damit erfüllt aber auch die Menge $S_1 \cup S_2$ die Eigenschaft:

$$u_i \geq \xi(i, S_1 \cup S_2).$$

Dies widerspricht der Maximalität von S_1 und S_2, da die Menge $S = S_1 \cup S_2$ ebenfalls die gewünschte Eigenschaft erfüllt, aber größer ist als S_1 und S_2.
Bezeichne nun S^* die eindeutige maximale Menge, für die gilt:

$$u_i \geq \xi(i, S^*) \quad \forall\, i \in S^*.$$

Man muss zeigen, dass der Mechanismus $\mathcal{M}_\xi$ nie einen Agenten $i \in S^*$ aus der belieferten Menge S löscht. Auch dies wird anhand eines Widerspruchsbeweises gezeigt. Angenommen es werden Agenten gelöscht, und betrachten wir den ersten Schritt, indem ein Agent $i \in S^*$ aus der belieferten Menge S gelöscht wird. Dann muss gelten:

$$u_i < \xi(i, S).$$

Da aber $S^* \subseteq S$ ist und aufgrund der Kreuzmonotonie $\xi(i, S) \leq \xi(i, S^*)$ gilt, ist auch $u_i < \xi(i, S^*)$, was der Definition von S^* widerspricht. Also enthält die Menge Q, welche von $\mathcal{M}_\xi$ ausgegeben wird, die Menge S^*, d.h. $S^* \subseteq Q$. Da aber vorausgesetzt wurde, dass die Menge S^* maximal ist, erhalten wir: $Q = S^*$. Also haben wir gezeigt, dass nie ein Agent $i \in S^*$ aus der belieferten Menge S gelöscht wird.

5.2 Satz von Moulin

Der Satz von Moulin zeigt, dass kreuzmonotone Cost Sharing-Methoden verwendet werden können, um „gruppen-wahrheitsgetreue“ Cost Sharing-Mechanismen zu konstruieren.

Satz 5.1: (Moulin)
Falls ξ ein γ-budget-balanced kreuzmonotones Cost Sharing-Schema ist, dann ist $\mathcal{M}_\xi$ „gruppen-wahrheitsgetreu“ und γ-budget-balanced.

Beweis: (Widerspruchsbeweis)
Angenommen es gibt eine Koalition T aus Agenten, die davon profitiert, statt ihres wahren Wertes u, gemäß dem Vektor u' zu bieten. Die Agenten in T können in zwei Teilmengen, T^+ und T^-, aufgeteilt werden, je nachdem ob ihr Angebot in u' größer oder kleiner ist, als ihr wahrer Wert in u. Es gilt: $T = T^+ + T^-$
Zunächst betrachten wir die Menge T^+:
Wir behaupten, dass T^+ ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets leer ist. D.h., Agenten können nicht davon profitieren, dass sie überbieten. Um dies zu zeigen, wird von einem Angebotsvektor ausgegangen, in dem alle Agenten aus T gemäß

u', und alle anderen Agenten wahrheitsgetreu bieten. Jetzt werden die Angebote der Agenten aus T^+ nacheinander auf ihren wahren Wert reduziert. Falls sich bei irgendeinem Schritt, beispielsweise wenn das Angebot von Agent $i \in T^+$ von u'_i auf u_i reduziert wird, das Auskommen der Auktion verändert, dann muss (gemäß Behauptung 5.1) der Agent i solange zur belieferten Menge gehören, solange er gemäß u' bietet, aber nicht mehr zur belieferten Menge gehören, wenn er gemäß u bietet. Das bedeutet, dass $u'_i \geq \xi(i, S_i) > u_i$, wobei S_i die belieferte Menge ist, wenn Agent i gemäß u' bietet. Dies wiederum würde bedeuten, dass Agent i einen höheren Preis bezahlen muss, als in dem Szenario, in dem jeder der Agenten aus T gemäß u' bietet. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, dass alle Agenten aus T von dieser geheimen Absprache profitieren können. Mittels dieses Arguments kann also das Angebot jedes Agenten aus T^+ auf seinen wahren Wert gesenkt werden, ohne dass sich das Auskommen der Auktion ändert. Also kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass T^+ leer ist.
Betrachten wir nun die Menge T^-:
Sei S' die belieferte Menge im unwahren Fall, d.h. wenn die Agenten gemäß u' bieten. S sei die belieferte Menge im wahren Szenario, also wenn die Agenten gemäß u bieten. Da das Angebot jedes Agenten im Vektor u' geringer oder gleich dem Angebot im Vektor u ist, gilt mittels Behauptung 5.1, $S' \subseteq S$. Aufgrund der Kreuzmonotonie von ξ impliziert dies aber, dass die Zahlung jedes Agenten im unwahren Szenario mindestens so hoch ist, wie die Zahlung im wahren Szenario. Daher kann kein Agent im unwahren Fall strikt besser gestellt sein, als im wahren Szenario.
Damit bietet jeder Agent immer wahrheitsgetreu.

6 Schluss

Mit dem Kern und dem Shapley Wert haben wir zwei Konzepte kennen gelernt, die verwendet werden können, um Kosten auf die Empfänger einer Leistung zu verteilen. Anhand des Beispiels 4.1 haben wir zudem gesehen, dass diese Konzepte nicht unbedingt zum selben Ergebnis führen. Die Frage, welches Konzept das Bessere ist, bleibt offen. Jedoch liegt die Vermutung nahe, im Fall eines nicht eindeutigen, beziehungsweise leeren Kerns, auf den Shapley Wert zurückzugreifen.

Anschließend haben wir eine Situation betrachtet, in welcher der Serviceanbieter mittels Auktion seine Kunden herausfiltert. Anhand des Cost Sharing-Mechanismus wurde gezeigt, wie die Menge der Kunden, mithilfe ihrer Angebote die sie abgeben, gefunden werden kann. Zu guter Letzt hat der Satz von Moulin gezeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen sichergestellt ist, dass jeder potentielle Kunde ein wahres Angebot abgibt und nicht aus der Abgabe falscher Angebote und geheimer Absprachen profitieren kann.