Universität Konstanz
Fachbereich Informatik und Informationswissenschaften
Lehrstuhl: Prof. Dr. Ulrik Brandes
Seminar: Algorithmische Spieltheorie
Betreuer: Bobo Nick
Sommersemester 2009

Grundlegende Lösungskonzepte der Spieltheorie

Basierend auf:

E. Tardos, V. Vazirani:
Basic Solution Concepts and Computational Issues

In N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V.Vazirani,
Algorithmic Game Theory[7]
Seiten 3-28

Heike Brugger
heike.brugger@web.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die verschiedensten alltäglichen Entscheidungssituation, an welchen mehrere Personen beteiligt sind, lassen sich vereinfacht auf eine Spielsituation zurückführen. Anhand mancher Spiele lässt sich schnell erkennen, welche Entscheidung ein rational handelnder Spieler treffen würde, das heißt welche Strategie er wählen würde. Bei anderen Spielen wiederum ist eine klare Aussage darüber, welche Strategie gespielt werden sollte, nicht möglich. Interessant ist hierbei, ob es in den Spielen jeweils Zustände gibt, aus welchen heraus sich die einzelnen Spieler nicht mehr verbessern können. Diesen Zustand nennt man Gleichgewicht.
Diesen Punkten werde ich in meiner Arbeit genauer nachgehen. Dafür ist zunächst eine Definiton des Spielbegriffs unumgänglich. Ich betrachte die verschiedenen Gleichgewichtsformen und eine Existenzaussage für Gleichgewichte. Im Anschluss daran sollen die bislang definierten und erläuterten Begriffe auf einen Spezialfall eines Spiels, dem so genannte Zwei-Personen Nullsummenspiel, angewendet werden. Die Besonderheit dieses Spiels besteht darin, dass die Summe der Gewinne und Verluste der beiden Spieler sich stets genau zu Null addiert, dass heißt, dass der eine Spieler genau das gewinnt, was der andere Spieler verliert.
Beginnen werde ich mit dem wohl klassischsten Spiel der Spieltheorie, dem Gefangenendilemma, um einen intuitiven Zugang zu der Begrifflichkeit eines Spiels zu schaffen.

2 Das Gefangenendilemma

Dieses Spiel stellt die Situation dar, in der sich zwei Gefangene A und B nach einer gemeinsamen Straftat befinden. Die Gefangenen haben keine Möglichkeit sich untereinander abzusprechen. Beide haben nun die Wahl zwischen zwei möglichen Strategien: entweder sie gestehen oder sie schweigen. Schweigen beide, so werden sie, aus Mangel an Beweisen jeweils nur zu zwei Jahren Haft verurteilt. Gesteht jedoch der Gefangene A und der Gefangene B schweigt, so muss B fünf Jahre in Haft, während A aufgrund seiner Kooperation nur ein Jahr Strafe absitzen muss. Gestehen jedoch beide Gefangenen, so müssen sie beide für vier Jahre in Haft. Die Situation lässt sich in folgender Kostenmatrix darstellen, welche die Anzahl der Gefängnisjahre angibt:

	G	S
G	4 4	5 1
S	1 5	2 2

Optimal wäre somit für beide Gefangenen nicht zu gestehen, da sie dann eine Gesamtstrafe von vier Jahren Haft absitzen müssten. Das Dilemma besteht nun darin, dass es in jeder Situation für beide Spieler günstiger ist zu gestehen. Schweigt Spieler

B, so kann Spieler A durch ein Geständnis die eigene Haftzeit von zwei Jahren auf ein Jahr verkürzen. Gesteht Spieler B, so verbessert Spieler A seine Situation durch ein Geständnis ebenfalls um ein Haftjahr von fünf auf vier Jahre. Analog gilt diese Überlegung für Spieler B. Die einzige stabile Lösung ist somit die, in der beide Spieler gestehen und sich dadurch beide vier Jahre Haft einhandeln. Die stabile Lösung weicht also für beide Gefangnenen im Ergebnis stark von der optimalen Lösung ab. Die Gefangen befinden sich im unausweichlichen Dilemma.

3 Formale Definition eines Spiels

Um im Folgenden Aussagen über bestimmte Spiele treffen zu können, ist es zunächst notwendig den Begriff des Spiels zu definieren.
An einem Spiel nehmen jeweils n Spieler $\{1, 2, \ldots, n\}$ teil. Diese Spieler sind meist Individuen. Handelt es sich bei den Spielern um Personengruppen oder zum Beispiel um ganze Länder, so ist entscheidend, dass diese Akteure einheitliche Entscheidungen treffen. Der Entscheidungsfindungsprozess, der sich innerhalb dieses Akteurs abspielt, liegt ausserhalb der Betrachtung des Spiels.
Jeder Spieler i wählt sich nun eine Strategie s_i aus seinem Raum aller möglichen Strategien S_i. Betrachtet man nun alle gewählten Strategien $s_1, \ldots, s_n$ so bilden diese gemeinsam den Strategievektor $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$, hierbei bezeichnet S die Menge aller Möglichen Strategiekombinationen, das heißt $S = \times_i S_i$.
Um Aussagen über die Strategiewahl der Spieler treffen zu können, ist es notwendig, dass alle Akteure über eine vollständige, transitive und reflexive Präferenzordnung verfügen. Dies lässt sich auf zwei Arten darstellen. Entweder als Nutzenfunktion: $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ oder als Kostenfunktion: $c_i : S \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Funktionen ordnen jeweils einem Vektor aus dem Strategieraum einen Wert (Kosten bzw. Nutzen) in $\mathbb{R}$ zu und ermöglichen somit die Erstellung einer Präferenzordnung für jeden Spieler. Im Allgemeinen sind die Kosten bzw. der Nutzen, die sich für die einzelnen Spieler ergeben, nicht identisch. Hinzu kommt, dass der Wert der sich für Spieler i ergibt, nicht nur von der eigenen gewählten Strategie abhängt, sondern auch von den Strategien aller anderen Spieler. Dies ist am Beispiel des Gefangenendilemmas schnell ersichtlich, siehe Kapitel 2. Entscheidend bei den Definitionen der Funktionen ist somit, dass sie für jeden Spieler i von $S \rightarrow \mathbb{R}$ abbilden und nicht etwa von $S_i \rightarrow \mathbb{R}$.
Für die Kosten- und Nutzenfunktionen gilt stets: $u_i(s) = -c_i(s)$.

4 Dominante Lösungsstrategie

Im Folgenden wird der Strategievektor $s \in S$ aufgeteilt in die Strategie $s_i \in S_i$ die der Spieler i spielt und den $(n-1)$-dimensionalen Vektor $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, welcher die Strategien aller anderen Spieler enthält. Es gilt somit $s_{-i} \in S_{-i}$, wobei $S_{-i} = \times_{j=(1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n)} S_j$ die Menge aller möglichen Strategiekombinationen der Spieler $\{1, \ldots, i-1, i+1, n\}$ ist.
Existiert nun eine eindeutige, Nutzen maximierende Strategie $s_i \in S_i$ für jeden Spieler i unabhängig von den Strategien die die anderen Spieler wählen, das heißt für

die Nutzenfunktion $u_i : S \to \mathbb{R}$ gilt:

$$u_i(s_i, s'_{-i}) \geq u_i(s'_i, s'_{-i})$$

$\forall i$, $\forall s' \in S$ so bezeichnet man diese Lösungsstrategie s_i als **dominant**.
Im Beispiel des *Gefangenendilemmas*, vergleiche Kapitel 2 wäre somit "gestehen" für beide Spieler die dominante Lösungsstrategie. An diesem Beispiel wird deutlich, dass die dominante Lösungstrategie im Allgemeinen nicht zum größten Nutzen der Spieler führt.
Existiert für jeden Spieler eine solche dominante Strategie, so lässt sich schnell feststellen, auf welches Ergebnis der Spielverlauf bei Nutzen maximierenden Akteuren hinausläuft. Allerdings ist nur in sehr wenigen Spielen eine solche dominante Strategie für jeden Spieler vorhanden.
Im nächsten Abschnitt soll geklärt werden, ob sich die Spieler nur auf Lösungen, welche auf dominanten Strategien aller Spieler beruhen, einigen können.

5 Nash-Gleichgewichte

John Forbes Nash Jr. definiert erstmals das sogenannte **Nash-Gleichgewicht** und liefert zeitgleich in seiner Dissertation 1950 den Existenzbeweis desselben.[6]
Ein Nash-Gleichgewicht bezeichnet einen Zustand, in dem kein Spieler durch Abweichen einen größeren Nutzen erzielen kann. Im Beispiel des Gefangenendilemmas ist somit der Zustand, in dem beide Spieler gestehen ein Nash-Gleichgewicht, siehe Kapitel 2.
In diesem Abschnitt wird nun betrachtet in welcher Form Nash-Gleichgewichte auftreten können.

5.1 Reines Nash-Gleichgewicht

Gilt für einen Strategievektor $s = (s_i, s_{-i}) \in S$

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \ \forall i, \forall s'_i \in S_i$$

so stellt dieser ein reines Nash-Gleichgewicht dar. Denn bei gegebenen Strategien s_{-i} der anderen Spieler, kann keine Abweichung des Spielers i von der Strategie s_i zu einer alternativen Strategie s'_i zu einer Verbesserung des persönlichen Nutzens führen.
Allerdings erhält man innerhalb eines Spiels nicht zwangsläufig ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht. Dies wird an folgendem Beispiel deutlich: In dem Koordinationsspiel **"Geschlechterkampf"** (Battle of the sexes) geht es darum, dass sich ein Paar am Abend treffen möchte. Entweder sie gehen zum Fussballspiel oder ins Kino. Sie haben es jedoch nicht geschafft einen Treffpunkt festzulegen. Der jeweilige Nutzen der Treffpunkte ist in folgender Tabelle dargestellt:

	F		K	
F		10		1
	8		1	
K		2		5
	2		6	

Der Nutzen ist natürlich dann am größten, wenn sie beide am selben Ort sind. Es gibt jedoch keine dominante Strategie für die Spieler, da der eigene Nutzen stark von der Strategie des anderen Spielers abhängt. Dennoch existieren hier zwei Nash-Gleichgewichte, denn haben sich die Beiden auf einen gemeinsamen Treffpunkt geeinigt, so kann keiner der beiden einen größeren Nutzen erzielen, in dem er zum anderen Ort geht. Existiert eine dominante Strategie, so führt diese immer zu einem Nash-Gleichgewicht. Allerdings folgt aus der Nicht-Eindeutigkeit des Nash-Gleichgwichts (vgl. *Geschlechterkampf*) sofort, dass nicht zu jedem Nash-Gleichgewicht eine dominante Strategie existiert. Der Unterschied der beiden Zustände besteht darin, dass eine dominante Strategie immer gewählt wird, unabhängig von der Strategiewahl der anderen Spieler (vgl. *Gefangenendilemma*). In einem Nash-Gleichgewicht jedoch geht man bereits von einem bestimmten Strategievektor s_{-i} aus. Setzt man diese Wahl der anderen Spieler voraus, lohnt sich eine Abweichung nicht.
Je nach Aufbau der Nutzenfunktionen, können unterschiedliche Nash-Gleichgewichte auch sehr unterschiedlichen Nutzen erzeugen. Die Tatsache, dass ein Nash-Gleichgewicht im Allgemeinen nicht der optimalen Lösung entspricht, führt dazu, dass durch nicht kooperatives und egoistisches Verhalten Nachteile für die beteiligten Spieler entstehen. Um das Ausmaß dieses Nachteils exakt bestimmen zu können, wurden zwei Größen eingeführt, der

$$\text{Price of Anarchy} = \frac{\text{Schlechtestes Nash-Gleichgewicht}}{\text{Optimale Lösung}} \text{ (PoA)}$$

und der

$$\text{Price of Stability} = \frac{\text{Bestes Nash-Gleichgewicht}}{\text{Optimale Lösung}} \text{ (PoS)}$$

Der PoA wurde in diesem Zusammenhang erstmals von Papadimitriou verwendet[4]. Den PoS führten Anshelevich u. a. ein [1]. Die beiden Größen messen die Qualität eines Nash-Gleichgewichts, in dem sie den Gesamtnutzen dieses Gleichgewichts in ein Verhältnis mit dem Nutzen der optimalen Lösung setzen. Die Nash-Gleichgewichte bilden ein (nicht kontinuierliches) Spektrum, innerhalb welches sich die Spieler auf einen Zustand einigen können. Das beste Nash-Gleichgewicht befindet sich am einen Ende dieses Spektrums, an dem Punkt welcher minimalen Abstand zur optimalen Lösung hat. Entspricht das beste Nash-Gleichgewicht der optimalen Lösung, so gilt: $PoS = 1$. Das schlechteste Nash-Gleichgewicht, bezeichnet den letzten Zustand, der noch zu einer Einigung führt. Er befindet sich somit am anderen Ende des Spektrums in maximaler Entfernung von dem Optimum.
Die Berechnung dieser Größen erläutere ich im Folgenden anhand der bereits eingeführten Beispiele.

In dem *Gefangenendilemma* (Kapitel 2) existiert nur ein Nash-Gleichgewicht, somit gilt offensichtlich $PoA = PoS = 2$. Im *Geschlechterkampf* aus Abschnitt 5.1 sind hingegen zwei Gleichgewichte zu finden. Das beste Nash-Gleichgewicht wird erreicht, wenn sich beide für das Fussballspiel entscheiden. Dieses Gleichgewicht entspricht der optimalen Lösung, somit gilt: $PoS = \frac{18}{18} = 1$. Da in diesem Spiel der Nutzen und nicht die Kosten betrachtet werden, muss $PoA \leq PoS$ gelten. Denn der Nutzen im schlechtsesten Nash-Gleichgewicht kann nie den Nutzen im besten Nash-Gleichgewicht übersteigen. Im schlechtesten Nash-Gleichgewicht ergibt sich ein Gesamtnutzen von 11, dieses entsteht wenn beide ins Kino gehen. Für den PoA ergibt sich daher: $PoA = \frac{11}{18}$.

5.2 Gemischtes Nash-Gleichgewicht

Die im vorigen Abschnitt eingeführten reinen Nash-Gleichgewichte sind jedoch nicht in jedem Spiel zu finden.
Dies wird anhand des Spiels **Matching Pennies** deutlich. Es werden zwei Münzen gelegt. Spieler A (Zeilenspieler) erhält immer dann einen Gewinn von 1, wenn beide Münzen dasselbe zeigen und verliert 1, wenn die Münzen etwas unterschiedliches zeigen. Bei Spieler B (Spaltenspieler) verhält es sich genau umgekehrt.

	Z	K
Z	-1 1	1 -1
K	1 -1	-1 1

Aus der Matrix ist ersichtlich, dass sich in diesem Spiel immer einer der Spieler durch Abweichung verbessern kann, egal in welchem der vier Zustände sie sich befinden. Da immer ein Anreiz besteht abzuweichen, existiert hier kein reines Nash-Gleichgewicht. Jedoch kann hier eine andere Form eines Nash-Gleichgewichts hergestellt werden, das sogenannte **gemischte Nash-Gleichgewicht**.
Sei $(s_{j1}, \ldots, s_{jm})$ der Strategievektor von Spieler j, d.h. dieser Vektor besteht aus allen m möglichen Strategien die Spieler j wählen kann. Jeder einzelnen Möglichkeit wird nun durch den Spieler eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $\{a_{j1}, \ldots, a_{jm}\}$ zugeordnet. Dies bedeutet, dass hier der Zufall entscheidet, welche reine Strategie gespielt wird. Diese Strategie, welche über Wahrscheinlichkeiten definiert wird, nennt man **gemischte Strategie**.
Auch die gemischten Strategien sind in der Lage stabile Gleichgewichte zu erzeugen. Betrachten wir hierzu erneut das Beispiel der *Matching Pennies*. Wählt der Spieler A beide Strategien mit einer Wahrscheinlichkeit von $a_{A1} = a_{A2} = \frac{1}{2}$ und Spieler B wählt eine der beiden reinen Strategien, so erhält Spieler A insgesamt einen Nutzen von $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$. Diesen kann er durch Abweichen von der vorher bestimmten Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nicht mehr verbessern. Denn wählt er eine der beiden Strategien mit einer größeren Wahrscheinlichkeit, so kann Spieler B dies bei der Strategiewahl ausnutzen und dadurch seinen Nutzen erhöhen. Analog

gilt dies für Spieler B. Spielen beide Spieler jeweils beide Strategien mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, so erhält man einen Gesamtnutzen von Null. Auch bei vollständiger Information über die Strategie des anderen Spielers, kann sich nun keiner der beiden Spieler durch Abweichen verbessern. Die Spieler befinden sich somit in einem **gemischten Nash-Gleichgewicht**.
Die Begriffe *Price of Anarchy* und *Price of Stability* werden bei gemischten Gleichgewichten analog zu den beiden Begriffen verwendet, welche wir bereits in Abschnitt 5.1 eingeführt haben.

5.3 Spiele ohne Gleichgewicht

In den vorigen Abschnitten wurden verschiedenen Formen eines Nash-Gleichgewichts vorgestellt. Allerdings gibt es auch Spiele, in welchen kein Gleichgewicht zu finden ist, weder ein reines, noch ein gemischtes.
Betrachten wir hierzu folgendes Beispiel der Preisfestlegung:
Die Verkäufer 1 und 2 bieten ein identisches Produkt an. Alle drei Käufer wollen dieses Produkt kaufen, sind aber nicht bereit mehr als 1 zu bezahlen. Beide Verkäufer müssen nun einen Preis festsetzen, mit dem sie ihren Gewinn maximieren, folglich gilt für diesen Preis $p_i \in [0, 1]$. Die Spieler haben somit unendlich viele Möglichkeiten den Preis festzulegen.

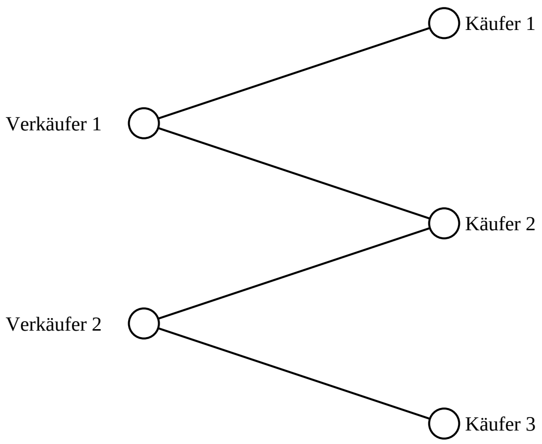

Abbildung 1: Spiel ohne Gleichgewicht

Wie in Abbildung 1 dargestellt ist, kann Käufer 1 nur bei Verkäufer 1 und Käufer 3 nur bei Verkäufer 2 kaufen. Käufer 2 wird sich für das günstigere Angebot entscheiden und somit den Ausschlag für den Gewinn geben.
Nehmen wir an, dass Verkäufer 1 einen Preis bestimmt mit $p_1 > \frac{1}{2}$. Für Verkäufer 2 wäre es nun rentabel einen Preis p_2 festzulegen, für welchen $\frac{1}{2} < p_2 < p_1$ erfüllt ist. Dadurch würde Verkäufer 2 einen Gewinn von mehr als 1 erzielen. Verkäufer 1 würde darauf seinen Preis p_1 soweit senken, dass $\frac{1}{2} < p_1 < p_2$ gilt. Dieser Prozess würde nun beliebige lange weiterlaufen und der Preis sich immer weiter verringern. $p_1 > \frac{1}{2}$ ist somit kein Gleichgewicht.
Die zweite Möglichkeit wäre, dass Verkäufer 1 einen Preis p_1 festlegt, für welchen gilt: $p_1 \leq \frac{1}{2}$. Sein Gewinn wäre somit auf jeden Fall kleiner als 1. Für Verkäufer 2

ist es nun am rentabelsten seinen Preis p_2 auf $p_2 = 1$ festzusetzen. Verkäufer 1 wird darauf hin seinen Preis erhöhen, bis der Preis oberhalb von $\frac{1}{2}$ liegt. Folglich ist auch $p_1 \leq \frac{1}{2}$ kein Gleichgewicht dieses Spiels.
Somit existiert in diesem Spiel kein Nash-Gleichgewicht, weder ein reines noch ein gemischtes.
Eine Aussage darüber, welche Eigenschaft dieses Spiels ausschlaggebend war für die Nicht-Existenz eines Gleichgewichts, wird in folgendem Abschnitt getroffen.

6 Existenzaussage

Wir haben nun Spiele kennengelernt, in denen es Nash-Gleichgewichte gibt und Spiele in denen kein Gleichgewicht vorhanden ist. Nun stellt sich die Frage, in welchen Spielen immer ein Gleichgewicht zu erwarten ist und in welchen Spielen im Allgemeinen nicht. Den Existenssatz für gemischte Nash-Gleichgewichte und den zugehörigen Beweis legte Nash selbst bereits 1950 ebenfalls in seiner Dissertation vor. [6]

Satz. Jedes Spiel mit einer endlichen Anzahl an Spielern und einer endlichen Anzahl von möglichen Strategien hat ein gemischtes Nash-Gleichgewicht.

Beweis. Die Duchführung des Beweises geschieht in Anlehnung an [5]. Dieser Beweis beschränkt sich der Einfachheit halber auf das Spiel mit zwei Spielern, der Beweis für k Spieler ergibt sich aus einer Verallgemeinerung des folgenden Beweises.
Seien $A_1, \ldots, A_n$ bzw. $B_1, \ldots, B_n$ die reinen Strategien der Spieler A bzw. B.
$X = (x_1, \ldots, x_m)$ bzw. $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ seien beliebige aber fest gewählte gemischte Strategien von A bzw. B und $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$ die zugehörigen Räume aller möglichen gemischten Strategien. Seien $u_A : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ bzw. $u_B : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ die zugehörigen Nutzenfunktionen. Wir definieren uns nun:

$$r_i = max(u_A(A_i, Y) - u_A(X, Y), 0)$$

und analog

$$s_j = max(u_B(X, B_j) - u_B(X, Y), 0)$$

Das heißt vom Nutzen der reinen Strategie A_i bzw. B_j wird der Nutzen der gemischten Strategie X bzw. Y subtrahiert, jeweils unter der Voraussetzung, dass der andere Spieler die gemischte Strategie spielt. Ist diese Differenz größer als Null, so entspricht sie r_i bzw. s_j, ist sie jedoch kleiner als Null, so folgt $r_i = 0$ bzw. $s_j = 0$.
Weiter definiert man

$$x_i^* = \frac{x_i + r_i}{1 + \sum_{i=1}^{m} r_i}$$

und analog

$$y_j^* = \frac{y_j + s_j}{1 + \sum_{j=1}^{n} s_j}$$

$X^* = \{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ und $Y^* = \{y_1^*, \ldots, y_n^*\}$ beschreiben nun ebenfalls gemischte Strategien.Wir definieren uns nun die Funktion $F(X, Y) = (X^*, Y^*)$, diese ist stetig.
Die Behauptung lautet nun, dass für jedes beliebige X und Y gilt:

$$(X, Y) \text{ ist ein Gleichgewicht} \Leftrightarrow F(X, Y) = (X, Y) \Leftrightarrow X = X^* \wedge Y = Y^*$$

Gehen wir also davon aus, dass (X, Y) ein Gleichgewichtspaar ist, so muss der Nutzen von (X, Y) für Spieler A mindestens genauso groß sein wie für jede reine Strategie (A_i, Y), d.h. $u_A(A_i, Y) \leq u_A(X, Y)$, da es sich sonst für Spieler A lohnen würde vom Paar (X, Y) abzuweichen und es sich somit nicht um ein Gleichgewichtspaar handeln könnte. Somit gilt jedoch stets: $u_A(A_i, Y) - u_A(X, Y) \leq 0$ und folglich $r_i = 0 \; \forall i$. Nach Definiton von x_i^* folgt $x_i^* = x_i \; \forall i$ und damit $X^* = X$. Analog folgt $Y = Y^*$.

Der Beweis der Rückrichtung folgt nun durch Widerspruch. Gehen wir also davon aus, dass (X, Y) kein Gleichgewichtspaar ist. Dann existiert entweder eine alternative gemischte Strategie X' für Spieler X für welche $u_A(X', Y) > u_A(X, Y)$ gilt, oder eine alternative gemischte Strategie Y' für Spieler Y für welche $u_B(X, Y') > u_B(X, Y)$ gilt. Denn solange wir uns nicht im Gleichgewicht befinden, wird sich für mindestens einen der Spieler das Abweichen vom momentanen Zustand lohnen.
Setzen wir also im Folgenden voraus, dass Spieler A seinen Nutzen erhöht, wenn er die alternative Strategie X' spielt (*). Da für die gemischten Strategien die Gleichung

$$u_A(X', Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i' u_A(A_i, Y)$$

stets erfüllt ist, muss mindestens ein i existieren, für welches $u_A(A_i, Y) > u_A(X, Y)$. Das heißt für dieses i ist der Nutzen der reinen Strategie A_i größer als der Nutzen der gemischten Strategie X unter der Voraussetzung, dass Spieler B die gemischte Strategie Y spielt.
Denn existiert kein solches i würde sich folgende Ungleichung ergeben:

$$u_A(X', Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i' u_A(A_i, Y) \leq \sum_{i=1}^{m} x_i' u_A(X, Y) = u_A(X, Y) \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_i'}_{=1} = u_A(X, Y)$$

Dies steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung (*).
Mit $u_A(A_i, Y) > u_A(X, Y)$ folgt $u_A(A_i, Y) - u_A(X, Y) > 0$ und damit nach Definition auch $r_i > 0$, also insbesondere $\sum_{i=1}^{m} r_i > 0$(**).
Andererseits muss auch für die gemischte Strategie X die Gleichung

$$u_A(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i u_A(A_i, Y)$$

erfüllt sein. Es existiert somit mindestens ein i, mit $x_i > 0$. Wählt man dieses i, so gilt $u_A(A_i, Y) \leq u_A(X, Y)$. Nach Definition folgt für dieses i: $r_i = 0$(***), weiter ergibt sich mit (**) und (***):

$$x_i^* = \frac{x_i}{1 + \sum_{i=1}^{m} r_i} < x_i$$

und somit insgesamt $X^* \neq X$.
Somit haben wir gezeigt, dass für ein Paar (X, Y) welches kein Gleichgewicht ist, nie $X^* = X$ und $Y^* = Y$ gleichzeitig erfüllt sein können. Hieraus ergibt sich

umgehend die Rückrichtung des Satzes: Gilt für ein Paar $F(X,Y) = (X,Y)$, also $(X,Y) = (X^*,Y^*)$, so ist dies ein Gleichgewichtspaar.
Die Menge $C = (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ ist ein abgeschlossener, beschränkter, konvexer Teilraum des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^{(n+m)}$. Da $F : C \to C$ stetig ist, folgt mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes die Existenz eines Fixpunktes (X,Y) in C.
Nach dem obig Gezeigten ist (X,Y) genau dann ein Fixpunkt, wenn es ein Gleichgewichtspaar ist.
Somit folgt die Behauptung des Existenzsatzes.
Zu dem sieht man mit Hilfe des Beispiels aus Abschnitt 5.3, dass die Voraussetzung endlich vieler möglicher Strategien eine wichtige Bedingung für die Existenz eines Gleichgewichts ist.

7 Zwei-Personen Nullsummenspiele

Ein Zwei-Personen Nullsummenspiel ist ein Spiel in dem sich die Gewinne und Verluste der beiden Spieler immer zu Null aufaddieren. Somit gilt in diesem Spiel zusätzlich zu der Bedingung $u_i(s) = -c_i(s)$ aus Abschnitt 3: $u_1(s) = c_2(s)$ bzw. $u_2(s) = c_1(s)$

	A	B
A	6 -6	1 -1
B	2 -2	-5 5

Die Existenz von reinen Nash-Gleichgewichten ist in Zwei-Personen-Nullsummenspielen selten. Geht man von endlich vielen möglichen Strategien aus, so muss (nach Abschnitt 6) jedoch jedes Zwei-Personen Nullsummenspiel ein gemischtes Nash-Gleichgewicht besitzen.
Ein Algorithmus zur Bestimmung des gemischten Nash-Gleichgewicht ist die sogenannte Mini-Max-Regel, welche in folgendem Abschnitt näher erläutert wird.

7.1 Der Mini-Max-Algorithmus in Zwei-Personen Nullsummenspielen

Nach Abschnitt 6 existieren zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen p^* von Spieler A und q^* von Spieler B, die gemeinsam ein gemischtes Nash-Gleichgewicht bilden. Stellt N die Nutzenmatrix von Spieler A dar, so kann der erwartete Nutzen des Spielers A im Gleichgewicht und somit der Verlust des Spielers B ausgedrückt werden durch: $v^* = p^* N q^*$ (p^*: Zeilenvektor; q^*: Spaltenvektor). Ein Nash-Gleichgewicht hat die Eigenschaft, dass sich alle beteiligten Spieler nicht besser stellen können, auch wenn sie die Strategien der anderen Spieler kennen (vgl. Abschnitt 5). Somit kann von vollständiger Information ausgegangen werden.
Nehmen wir also an, Spieler A wählt eine Strategie p. Spieler B wird darauf hin

die Strategie q spielen, in der der kleinste Wert vorkommt. Deshalb, besagt die Mini-Max-Regel, wird Spieler A zu Beginn die Zeile wählen, in der die kleinste Zahl größer ist, als die jeweils kleinste Zahl der anderen Zeilen. Das heißt, er betrachtet den minimalen Nutzen jeder Zeile ($min_j(pN)_j$) und wählt nun die Zeile, in der der minimale Nutzen maximal ist. Dadurch ergibt sich für den Spieler A ein Wert $v_A = max_i(min_j(pN)_j)$, dies ist der **maximal sichere Gewinn** des Spielers A.
Analog erhalten wir den **minimal sicheren Gewinn** des Spielers B. Kennt Spieler A die Strategie q des Spielers B so wird er auf jeden Fall die Strategie p wählen, mit der er den maximal möglichen Gewinn erhält. Der Spieler B betrachtet somit bei der Wahl seiner Strategie q die Maxima ($max_i(Nq)_i$) in den Spalten. Um seinen Verlust zu minimieren, wählt er nun die Spalte in der das Maximum kleiner ist als die Maxima in den anderen Spalten, somit erhält er einen minimal sicheren Wert $v_B = min_j(max_i(Nq_i))$.
Wir haben nun den Wert v_A als maximal sicheren Gewinn des Spielers A und den Wert v_B als minimal sicheren Wert des Spielers B. Um nun eine Verbindung zwischen diesen Werten herstellen zu können, betrachten wir ihren Zusammenhang mit dem Gleichgewichtswert v^*.
Da der Spieler A einen sicheren Gewinn von v_A hat, muss er auch im Gleichgewicht mindestens so viel gewinnen. Es gilt also: $v_A \leq v^*$. Spieler B wird aber auf jeden Fall die Spalte wählen, in der p^*N den kleinsten Wert annimmt. Denn andernfalls hätte Spieler B stets einen Grund abzuweichen, für $v_A < v^*$ kann somit kein Gleichgewicht existieren. Somit muss auch $v^* \leq v_A$ gelten und damit $v_A = v^*$. Analog folgt die Argumentation für $v_B = v^*$ und somit $v_A = v_B$.
Somit ist der maximal garantierte Gewinn des Spielers A identisch mit dem minimal sicheren Wert für Spieler B.

7.2 Gleichgewicht als Lösung des Mini-Max-Algorithmus

Seien also p und q die optimalen Strategien der beiden Spieler. Wie wir oben gezeigt haben, gilt die Identität: $v_A = v_B$. Da Spieler B ein Verlust von höchstens v_B gesichert ist, kann Spieler A seinen Gewinn nicht mehr vergrößern. Andererseits erhält der Spieler A auf jeden Fall mindestens einen Gewinn von v_A, daher kann sich Spieler B nicht durch Abweichen zu Lasten des Spieler A verbessern.

7.3 Beispiel eines Zwei-Personen Nullsummenspiels

Im Folgenden werde ich nur die Kosten bzw. den Nutzen des Spielers A (Zeilenspieler) in die Matrix eintragen. Die Kosten bzw. der Nutzen des Spielers B (Spaltenspieler) können dann analog, mit negativem Vorzeichen, dargestellt werden.
Ich möchte nun veranschaulichen wie in einem konkreten Fall die Strategien p und q gewählt werden müssten, damit die Spieler sich im Gleichgewicht befinden. Hierzu betrachten wir folgendes Beispiel, welches auch in [2] näher ausgeführt ist:
In einem Tennisspiel ergibt sich für den Spielverlauf folgende Matrix. Diese stellt den Nutzen des Spielers A und somit die Kosten des Spielers B dar.

	Vorhand	Rückhand
Vorhand	50	80
Rückhand	90	20

Zunächst können nun das Minimax und das Maximin bestimmt werden:

	Vorhand	Rückhand	**Zeilenminimum**
Vorhand	50	80	50(Maximin)
Rückhand	90	20	20
Spaltenmaximum	90	80(Minimax)	

In reinen Strategien würde Spieler A nun Vorhand spielen, da er in dieser Strategie das Maximin erhält, und Spieler B würde Rückhand spielen, um dass Minimax zu erreichen. In diesem Spiel gilt also: 50 (Maximin) $<$ 80 (Minimax). Spieler A kann somit seinen maximal sicheren Gewinn weiter erhöhen, ohne den minimal sicheren Gewinn des Spielers B einzuschränken. Analog kann Spieler B seinen minimal sicheren Gewinn weiter Senken, ohne den maximal sicheren Gewinn des Spielers A zu gefährden. Wir befinden uns offensichtlich noch nicht in einem Gleichgewicht.
Um nun konkret bestimmen zu können, bei welchen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\{p, (1-p)\}$ des Spielers A und $\{q, (1-q)\}$ des Spielers B sich das Spiel im Gleichgewicht befindet, betrachten wir zunächst den sogenannten p-Mix für Spieler A. Spielt Spieler A *Vorhand* mit einer Wahrscheinlichkeit p und *Rückhand* mit einer Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ so ergibt sich folgender Mix:

	Vorhand	Rückhand
Vorhand	50	80
Rückhand	90	20
p-Mix	50p+90(1-p)	80p+20(1-p)

Der p-Mix ist dann optimal, wenn der Nutzen konstant bleibt, unabhängig von der Strategiewahl des anderen Spielers.
Im Optimum muss somit gelten: $50p + 90(1-p) = 80p + 20(1-p)$, also $p = 0.7$. Es folgt ein p-Mix von $\{0.7, 0.3\}$. Dieser p-Mix garantiert Spieler A einen Nutzen von 62. Durch das Spielen des optimalen p-Mix kann Spieler A somit sein Maximin von 50 auf 62 erhöhen.
Analog bestimmt man nun den q-Mix des Spielers B:

	Vorhand	Rückhand	**q-Mix**
Vorhand	50	80	50q+80(1-q)
Rückhand	90	20	90q+20(1-q)

Es ergibt sich $50q+80(1-q) = 90q+20(1-q)$, also $q = 0.6$ und damit ein q-Mix von $\{0.6, 0.4\}$. Für Spieler B ergibt sich somit Kosten von 62. Wählt Spieler B diesen q-Mix, so kann er sein Minimax von 80 auf 62 senken.
Spielen beide Spieler zeitgleich ihren p- bzw. q-Mix, so entspricht das Maximin v_A des Spielers A dem Minimax v_B des Spielers B. Die beiden Strategiemixe bilden somit gemeinsam ein gemischtes Nash-Gleichgewicht des Zwei-Personen Nullsummenspiels 7.2.

8 Ausblick

Abgesehen von den hier vorgestellten Spielen und Gleichgewichten gibt es selbstverständlich noch weitere, die in der Spieltheorie von Bedeutung sind. In meiner Arbeit habe ich mich jedoch auf diejenigen beschränkt, welche in Zusammenhang mit den Zwei-Personen Nullsummenspielen stehen. In diesem Abschnitt möchte ich dennoch einen kurzen Ausblick über zwei weitere Gleichgewichte und deren zu grundeliegende Spielformen geben.

8.1 Korrelierte Gleichgewichte

Entscheidend bei diesem Gleichgewicht ist die Existenz eines unabhängigen, vertrauenswürdigen Koordinators. Dieser Koordinator wählt Strategien für alle beteiligten Spieler. Bekommen die Spieler von dem Koordinator eine Strategie vorgegeben, so können sie davon ausgehen, dass diese Strategie ein Gleichgewicht darstellt, das heißt, dass es sich für keinen Spieler lohnt von der vorgegebenen Strategie abzuweichen.
Ein korreliertes Gleichgewicht ist somit eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(s) = p(s_i, s_{-i})$, wobei $s \in S$, welche der Koordinator festlegt. Die Verteilung ist ein korreliertes Gleichgewicht, falls für alle Spieler i und für alle Strategien $s_i, s'_i \in S_i$ die Ungleichung

$$\sum_{s_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s'_i, s_{-i})$$

erfüllt ist. Denn genau wenn diese Ungleichung gilt, ist der Nutzen der vorgegebenen Strategie s_i, bei gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(s_i, s_{-i})$ größer als der Nutzen jeder anderen möglichen Strategie s'_i.

8.2 Kooperative Spiele und starke Nash-Gleichgewichte

Bislang habe ich nur Spiele betrachtet, in denen alle Spieler unabhängig voneinander ihre Entscheidungen treffen. Jedoch können, je nach Eigenschaften eines bestimmten Spiels, auch innerhalb dieses Spiels die verschiedenen Spieler in Gruppen agieren und ihre Handlungen koordinieren. Das egoistische Verhalten der Spieler bleibt jedoch bestehen. So kann es sich zum Beispiel für die Mitglieder einer Gruppe A lohnen gemeinsam von einer bestimmten Strategie s abzuweichen. Dies ist der Fall, falls für alle Mitglieder i der Gruppe A der Nutzen der momentan gespielten Strategie geringer ist als der Nutzen einer Strategie s'_A unter der Voraussetzung, dass alle Nicht-Mitglieder ihre Strategie beibehalten. Formal muss somit die Ungleichung

$$u_i(s) \leq u_i(s'_A, s_{-A})$$

für alle Spieler i der Gruppe A erfüllt sein.
Innerhalb eines kooperativen Spiels stellt eine Strategie s ein sogenanntes **starkes Nash-Gleichgewicht** dar, falls keine Gruppe A existiert, für die sich das gemeinsame Abweichen von der Strategie s in erhöhtem Nutzen auszahlt. Analog zu Abschnitt 5.1 kann in einem kooperativen Spiel der

$$\textbf{Strong Price of Anarchy} = \frac{\text{schlechtestes starkes Nash-Gleichgewicht}}{\text{Optimale Lösung}}$$

definiert werden. Da sich die Spieler in diesem Spiel kooperativ verhalten, misst der *Strong Price of Anarchy*, im Gegensatz zum *Price of Anarchy*, nur, wie nachteilig sich das egoistische Verhalten der Spieler auf den Gesamtnutzen auswirkt und verzichtet auf den Einfluss des nicht-kooperativen Verhaltens.

Literatur

[1] Elliot Anshelevich, Anirban Dasgupta, Jon Kleinberg, Éva Tardos, Tom Wexler, and Tim Roughgarden. The price of stability for network design with fair cost allocation. In *In FOCS*, pages 295–304, 2004.

[2] Avinash K. Dixit and Susan Skeath. *Games of Strategy*. W. W. Norton and Company, second edition, 2004.

[3] Manfred J. Holler and Gerhard Illing. *Einführung in die Spieltheorie*. Springer, seventh edition, 2009.

[4] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. Worst-case equilibria. In *in Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 404–413, 1999.

[5] Eliott Mendelson. *Introducing Game Theory and Its Applications*. Chapman and Hall, first edition, 2004.

[6] John Forbes Nash. *Non-Cooperative Games*. PhD thesis, Princetion University, 1950.

[7] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, and Vijay Vazirani. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, 2007.