Universität Konstanz
Algorithmische Spieltheorie
Sommersemester 2009

Kombinatorische Auktionen

Basierend auf:

L. Blumrosen, N. Nisan: **Combinatorial Auctions**.

In: N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani (Hrsg.): **Algorithmic Game Theory**, Kapitel 24. Cambridge University Press, 2007.

Markus Fleckenstein
01/625983
30. 08. 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bei *kombinatorischen Auktionen* geht es um Auktionen, prinzipiell gesehen also um Zuweisungen von mehreren Ressourceneinheiten, quasi als Güter, die versteigert werden, auf mehrere Ressourcenabnehmer als Bieter. Die Begriffe *Güter* und *Bieter* werden im folgenden wie hier dargestellt verwendet.

Wesentlich bei dem Modell der kombinatorischen Auktionen ist die Bedingung, dass die Güter *zeitgleich* auf die verschiedenen Bieter aufgeteilt werden, d.h. es werden möglichst *günstige* Verteilungen der gesamten Gütermenge auf die Menge der Bieter gesucht.

Dies führt zu kombinatorischen Aspekten, und ermöglicht auch eine Verwendung des Modells für gewisse spieltheoretische Fragestellungen. Insbesondere und offensichtlicherweise lassen sich auch gerade netzwerktechnische Zuweisungsprobleme im Bezug auf Ressourcenmanagement durch kombinatorische Auktionen sehr gut modellieren.

Die nachfolgende Hausarbeit soll zeigen, wie und in welcher Form das vorzustellende Modell der kombinatorischen Auktionen für die Lösung praktischer Probleme verwendet werden kann. Hierbei sind sicherlich verschiedene Faktoren relevant, am interessantesten ist aber wohl die Frage der Berechnungskomplexität der Lösungsalgorithmen für erwähnte Zuweisungsprobleme, die man aus dem Modell ableiten kann. Es wird sich hierbei zeigen, dass selbst für einen Spezialfall kombinatorischer Auktionen bereits ein NP-vollständiges Problem vorliegt.

Es soll deshalb auch aufgezeigt werden, wie trotz dieser NP-Vollständigkeit verwertbare Ergebnisse erreicht werden können. So lassen sich beispielsweise effiziente Algorithmen finden, die die optimale Lösung des Problems innerhalb gewisser Genauigkeitsschranken approximieren. Auch auf verschiedene Heuristiken soll eingegangen werden, die in bestimmten Fällen Lösungen berechnen können.

2 Hauptteil

Im Folgenden soll nun also erläutert werden, wie das Modell der kombinatorischen Auktionen verwendet werden kann, aber auch, anhand eines Spezialfalles erläutern, wo das Modell gewisse Grenzen besitzt, und wie damit umgegangen werden kann. Hierzu ist natürlich zunächst ein klar definiertes Modell notwendig.

2.1 Definition des Modells

Bei kombinatorischen Auktionen geht es um Zuweisungen von Gütern an Bieter.
Im folgenden existiere daher:
Menge der n Bieter: N , $|N| = n$
Menge der m Güter: M , $|M| = m$

Um zwei verschiedene Verteilungen der Güter auf die Bieter bezüglich ihrer Rentabilität vergleichen zu können, muss den Verteilungen in irgendeiner Weise ein vergleichbarer Wert zugewiesen werden.

Es liegt hier nahe, davon auszugehen, dass es einem Bieter etwas bringt, ein Gut zu erhalten. So wird jedem Bieter eine Wertfunktion zugeordnet, die genau bestimmt, welchen Wert es für einen bestimmten Bieter hat, wenn er eine bestimmte Teilmenge der Gütermenge erhält. Dies führt zur folgenden

Definition 1: *Wertfunktion*
Eine Funktion $v : \mathcal{P}(M) \to I\!R_+$ heißt *Wertfunktion*, falls:

- $v(S) =$ Wert der Gütermenge $S \subseteq M$
- $v(S) \leq v(S')$, falls $S \subseteq S'$
- $v(\emptyset) = 0$

Zunächst fällt auf, dass obige Definition die Wertfunktion auf der Potenzmenge der Ressourcenmenge definiert. Damit muss die Wertfunktion aber bereits für exponentiell viele (in m) Eingaben definiert sein. Wäre es nicht viel einfacher, die Wertfunktion nur auf der Gütermenge M selbst zu definieren, wodurch die Wertfunktion nur für m Eingaben bestimmt werden müsste?
Tatsächlich reicht eine Definition auf der Gütermenge M leider nicht aus, um allgemeine Wertvorstellungen zu modellieren. Da es ja um kombinatorische Auktionen geht, also um das zeitgleiche Verteilen von Gütern auf Bieter treten gewisse

Substitutions- oder Komplementäreffekte auf. Das bedeutet, dass der Wert einer bestimmten Teilmenge S der Gütermenge sich für einen Bieter nicht unbedingt über die Werte der einzelnen beteiligten Güter bestimmen muss.
Im Allgemeinen gilt also: $v(S) \neq \sum_{s \in S} v(s)$.

Mithilfe von Wertfunktionen lassen sich nun also gemäß obigen Überlegungen Verteilungen von Gütern an Bieter wie folgt definieren:

Definition 2: *Verteilungen und optimaler sozialer Nutzen*
Eine Familie $\{S_1, S_2, ..., S_n\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt *Verteilung*, falls: $S_i \cap S_j = \emptyset$ für $i \neq j$
Der *soziale Nutzen* einer Verteilung ist $\sum_{i \in N} v_i(S_i)$
Der soziale Nutzen ist *optimal*, wenn $\sum_{i \in N} v_i(S_i) \geq \sum_{j \in N} v_j\left(S'_j\right)$
für jede andere Verteilung $\{S'_1, S'_2, ..., S'_n\}$
Die Bedingung der Disjunktheit in der Definition gewährleistet, dass jedes Gut nur an maximal einen Bieter vergeben wird.

2.2 Anwendungsbeispiele

Stellt man ein theoretisches Modell zur Lösung praktischer Probleme auf, so sollte immer klar motiviert sein, welche Anwendungsbezüge ein erstelltes Modell überhaupt erfüllen kann.
Dass das oben dargestellte Modell gewisse Probleme, wie z.B. Zuweisungsprobleme im informationstechnischen Bereich modellieren kann, wurde bereits kurz erwähnt. Beispielhaft sei ein Kommunikationsnetzwerk betrachtet, das über eine begrenzte Anzahl an Verbindungsmöglichkeiten als Güter verfügt, und damit eine bestimmte Anzahl Verbindungen realisieren soll. Als Bieter treten hier also die Verbindungsanfragen auf, die an das Netzwerk gestellt werden. Bekommt ein Bieter die von ihm gewünschten Güter, so wird seine Verbindung aufgebaut. Auf diese Art lässt sich das Zuweisungsproblem für Netzwerkressourcen direkt durch das Modell der kombinatorischen Auktionen darstellen.
Kombinatorische Auktionen im klassischen Sinn treten in der Realität bei der Versteigerung des elektromagnetischen Spektrums auf. Dieses wird z.B. von Mobilfunktelefonen beansprucht, als Bieter treten also diverse Netzanbieter auf. Versteigert werden dabei Frequenzbänder bestimmter Breite. Es wird zwar genaugenommen für jedes einzelne Band eine eigene Auktion veranstaltet, allerdings finden diese Veranstaltungen annähernd gleichzeitig statt, so dass hier im gewissen Sinne doch gerade eine kombinatorische Auktion stattfindet.

2.3 Zielstrebige Bieter

Aus dem vorigen Abschnitt ist ersichtlich, dass für das Modell der kombinatorischen Auktionen durchaus eine Reihe von Anwendungsbezügen existiert. Bevor nun Algorithmen für das Problem entworfen werden, ist es sinnvoll, zunächst die Berechnungskomplexität der grundlegenden Fragestellung zu untersuchen. Auf die exponentielle Eingabegröße an die Wertfunktion wurde bereits hingewiesen.
Im folgenden soll zunächst ein einfacher Spezialfall, der Fall der *zielstrebigen Bieter* vorgestellt werden.
Bei zielstrebigen Bietern werden die Wertfunktionen der einzelnen Bieter vereinfacht. Ein zielstrebiger Bieter legt dabei nur Wert auf eine ganz bestimmte Teilmenge der Gütermenge. Erhält der Bieter diese Teilmenge oder mehr, so ergibt sich für ihn ein fester Wert. Es bedeutet also keinen Vorteil für ihn, wenn er mehr Güter erhält, als er erwünscht hat. Erhält er aber wiederum das entsprechende Paket nicht vollständig, so hat dies für ihn keinen Wert.

Definition 3: *Zielstrebige Bieter*
Eine Wertfunktion v heißt *zielstrebig*, falls:
es ex. $S' \subseteq M$, $v' \in \mathbb{R}_+$ mit:

- $v(S) = v'$ für alle $S \supseteq S'$ und
- $v(S) = 0$ für alle anderen $S \subseteq M$

(S', v') heißt *zielstrebiges Gebot*

Mithilfe dieser Definition lässt sich das Zuweisungsproblem bei zielstrebigen Bietern wie folgt beschreiben:

- Input: $\{S'_i, v'_i\}$ für jeden Bieter i
- Output: Gewinnermenge $W \subseteq N$, wobei:
  - $S'_i \cap S'_j = \emptyset$, falls $i \neq j \in W$
  - optimaler sozialer Nutzen entspricht $\sum_{i \in W} v'_i$

2.4 Berechnungskomplexität

Im vorigen Abschnitt wurde ein einfacher Spezialfall der kombinatorischen Auktionen dargestellt. In diesem Kapitel soll nun gezeigt werden, dass bereits bei diesem einfachen Fall NP-Vollständigkeit vorliegt.

Satz 1:

Das Entscheidungsproblem, ob der optimale soziale Nutzen einer Verteilung bei zielstrebigen Bietern mindestens den Wert k hat, ist NP-vollständig.

Beweis:

Die Beweisidee ist hier relativ einfach. Bekanntermaßen ist das Problem der unabhängigen Menge NP-vollständig. Was hier nun noch gezeigt werden muss, ist die Reduktion des Problems der unabhängigen Menge auf das betrachtete Zuweisungsproblem.

Diese Reduktion ist aber sehr direkt und offensichtlich:

Es sei hierzu kurz das Problem der Unabhängigen Menge vorgestellt:

Es sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ gegeben.

Eine *unabhängige Menge* ist eine Knotenmenge, so dass zwischen zwei verschiedenen Knoten aus dieser Menge in keinem Fall eine Kante in dem Graphen existiert.

Das Entscheidungsproblem, ob eine unabhängige Menge der Größe k existiert, ist NP-vollständig.

Die Übertragung findet nun wie folgt statt:

Die Kanten des Graphen seien die Güter der Auktion, die Knoten die zielstrebigen Bieter. Die Werte der zielstrebigen Gebote seien alle auf 1 gesetzt.

Die Gewinnermenge der zielstrebigen Auktion ist jetzt gerade eine unabhängige Menge im Graphen, denn jede Kante darf als Gut ja nur zu maximal einem Knoten als Bieter inzident sein. Kein Gut darf von zwei oder mehr Bietern ersteigert werden, also darf keine Kante zu zwei Knoten der Menge inzident sein.

Eine optimale Gewinnermenge ist in diesem Fall also eine maximale unabhängige Menge.

Damit wurde gezeigt, dass das Entscheidungsproblem, ob es eine Verteilung mit einem optimalen gesellschaftlichen Nutzen von k gibt, NP-vollständig ist.

2.5 Approximation

Im obigen Abschnitt wurde gezeigt, dass das Zuweisungsproblem bei kombinatorischen Auktionen NP-vollständig ist.

Es sei vorweggenommen, dass unter sehr einschränkenden Annahmen durchaus polynomielle Laufzeit erreichbar ist. Dies ist unter anderem dadurch zu erreichen, dass jedes zielstrebige Gebot nur maximal zwei Güter beansprucht.
Eine andere Möglichkeit wäre, anzunehmen, dass die sich die Güter anordnen lassen (bzgl. einer Totalordnung), und jeder Bieter in seinem zielstrebigen Gebot ein zusammenhängendes Segment innerhalb dieser Ordnung erwünscht. Hier lassen sich beispielsweise durch Dynamisches Programmieren gute Ergebnisse erzielen.
Es ist aber wohl offensichtlich, dass solche Einschränkungen das Modell selbst weitaus weniger anwendbar und nützlich machen. Aus diesem Grund soll auf andere Verfahren näher eingegangen werden.

Das zugrundeliegende Problem ist nun also NP-vollständig. Das bedeutet, dass sich kein Algorithmus entwerfen lässt, der für jede beliebige Eingabe in polynomieller Zeit eine Lösung berechnet.
Aus praktischer Sicht ist es aber bereits von großem Interesse, die optimale Lösung *ungefähr* zu kennen. Eine Möglichkeit, mit der NP-Vollständigkeit des Problems umzugehen wäre also, Algorithmen zu entwerfen, die die optimale Lösung so genau wie möglich approximieren.
Alternativ könnte man aber auch versuchen, Algorithmen zu finden, die für einen Großteil der Eingaben in polynomieller Laufzeit die optimale Lösung berechnen können, nur eben nicht für alle. Auch diese Möglichkeit funktioniert in der Praxis für fast alle zu erwarteten Fälle sehr effektiv.

Zunächst soll aber speziell auf die Approximation eingegangen werden:
Es ist hierbei zu allererst zu erklären, wie Approximation bzgl. des optimalen sozialen Nutzens zu verstehen ist.
Im Grunde genommen macht es hier nur Sinn, einen prozentualen Fehler zu betrachten. Ein konstante Fehlerschranke würde in ihrer Aussagekraft abhängig von den auftretenden Zahlengrößen doch stark variieren.
Daher lässt sich definieren:

Definition 4: *k-Approximation von Verteilungen*
Eine Verteilung $\{S_1, S_2, ..., S_n\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ist eine *k-Approximation* der optimalen Verteilung, wenn für alle anderen Verteilungen $\{T_1, T_2, ..., T_n\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ gilt:
$\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i(T_i)}{\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)} \leq k$

Mithilfe dieser Definition soll nun ein Algorithmus vorgestellt werden, der eine $\sqrt{m}$-Approximation des optimalen sozialen Nutzens darstellt.
Hierzu sei zunächst noch ein Mechanismus definiert. Dies ist eine bestimmte Art von Algorithmen, die als Eingabe die Menge der zielstrebigen Gebote erhalten, und eine Verteilung, sowie die zu der Verteilung gehörenden Preise für die einzelnen Bieter ausgeben:
Definition 5: *Mechanismus*
Sei V_{sm} die Menge aller zielstrebigen Gebote, A die Menge der Verteilungen.
Ein *Mechanismus* besteht aus:

- Zuweisungsfunktion: $f : (V_{sm})^n \rightarrow A$
- Preisfunktionen: $p_i : (V_{sm})^n \rightarrow I\!R_+$

Es gilt, dass ein Mechanismus genau dann effizient berechenbar ist, wenn f und p_i in polynomieller Zeit berechnet werden können.

Es soll nun der *Greedy-Mechanismus* vorgestellt werden.
Der *Greedy-Mechanismus* erhält als Eingabe die zielstrebigen Gebote der Bieter, und ordnet diese nach einer Art *Relevanz* an. Je mehr Wert ein Bieter erhalten kann, desto relevanter ist er, je mehr Güter er dafür benötigt, desto irrelevanter wird sein Gebot.
Sobald diese Kette erstellt ist, prüft der Mechanismus, welche Bieter in die Gewinnermenge gelangen können. Es wird hierzu durch die eben erstellte Liste iteriert, angefangen bei dem relevantesten Gebot, und für jedes Gebot geprüft, ob die erwünschten Güter noch vollständig vorhanden sind, oder bereits durch einen schon bestimmten Gewinner belegt sind. Sind alle erwünschten Güter noch frei, so wird der aktuelle Bieter in die Gewinnermenge eingeordnet.
Die Preise für einen Gewinner dafür, dass er sein gewünschtes Güterbündel erhält, bestimmen sich daraus, wieviel dieses Bündel anderen Bietern, die zwangsweise nach ihm in der *Greedy-Order* angeordnet sein müssen, Wert gewesen wäre. Hätte sowieso kein anderer Bieter irgendeines der betroffenen Güter beansprucht, so ist dieses Gut preisfrei für den Bieter.

Greedy-Mechanismus für zielstrebige Bieter

Initialisierung:

Ordne so, dass: $\frac{v'_1}{\sqrt{|S'_1|}} \geq \frac{v'_2}{\sqrt{|S'_2|}} \geq ... \geq \frac{v'_n}{\sqrt{|S'_n|}}$; $W \leftarrow \emptyset$

Für $i = 1, ..., n$:

Wenn: $S'_i \cap \left(\bigcup_{j \in W} S'_j \right) = \emptyset$, dann: $W \leftarrow W \cup \{i\}$

Ausgabe:

- Approximation der opt. Verteilung mittels Gewinnermenge
- Bezahlungen: $\forall i \in W : p_i = \frac{v'_j}{\sqrt{\frac{|S'_j|}{|S'_i|}}}$, j kleinster Index mit: $S'_i \cap S'_j \neq \emptyset$, und für alle $k < j, k \neq i, S_k \cap S_j = \emptyset$

  (wenn kein solches j existiert, dann $p_i = 0$)

Als Beispiel dafür, wie der Greedy-Mechanismus funktioniert betrachte man das nachfolgende Beispiel:

Es sei $N =$ Peter, Anne, Michael, Julia, und $M = \{a, b, c, d\}$.

Die zielstrebigen Gebote seien:

- Peter: $\{\{a, b, c\}, 8\}$
- Anne: $\{\{a, b\}, 7\}$
- Michael: $\{\{c, d\}, 5\}$
- Julia: $\{\{d\}, 3\}$

Ordnet man dies nun in der Greedy-Order an, so erhält man Anne vor Peter, Michael und Julia, denn: $\frac{7}{\sqrt{2}} \geq \frac{8}{\sqrt{3}} \geq \frac{5}{\sqrt{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{1}}$

Damit kann in die anfangs leere Gewinnermenge zunächst Anne, und dann nur noch Michael als Gewinner aufgenommen werden, da Peters Gebot nach Anne schon nicht mehr erfüllt werden kann, und nach Michael bereits alle Güter vergeben sind.

In diesem Fall bestimmt der Greedy-Mechanismus den korrekten optimalen sozialen Nutzen von $12 = v_{Anne} + v_{Michael}$

Der folgende Beweis liefert nun, dass der Greedy-Mechanismus zumindest für zielstrebige Bieter eine relativ gute Approximation des optimalen sozialen Nutzens in polynomieller Laufzeit berechnen kann.

Satz 2:

Der Greedy-Mechanismus für zielstrebige Bieter ist effizient berechenbar und erreicht eine $\sqrt{m}$-Approximation der optimalen sozialen Verteilung.

Beweis:

Die Berechenbarkeit des Mechanismus folgt direkt aus seinem Aufbau.

Zunächst muss eine Kette von n Elementen sortiert werden, hierfür ist polynomielle Laufzeit mehr als ausreichend.

Pro Schleifendurchgang können nun zwar rein theoretisch m viele Vergleiche notwendig werden, insgesamt kann aber ja jedes Gut nur maximal einmal beansprucht werden. Über Amortisationsanalysen erhält man auch hier eine polynomielle Laufzeit.

Der Nachweis der $\sqrt{m}$-Approximation ist etwas aufwendiger:

Sei OPT Gewinnermenge mit maximalem $\sum\limits_{i \in OPT} v_i'$.

$$\forall i \in W : OPT_i = \left\{ j \in OPT, j \geq i \mid S_i' \cap S_j' \neq \emptyset \right\}$$

Es gilt: $OPT \subseteq \bigcup\limits_{i \in W} OPT_i$

Zeige noch: $\forall i \in W : \sum\limits_{j \in OPT_i} v_j' \leq \sqrt{m} v_i'$

Jedes $j \in OPT_i$ ist in der Greedy-Order nach i:

also: $v_j' \leq \frac{v_i' \sqrt{|S_j'|}}{\sqrt{|S_i'|}}$

Damit: $\sum\limits_{j \in OPT_i} v_j' \leq \frac{v_i'}{\sqrt{|S_i'|}} \sum\limits_{j \in OPT_i} \sqrt{\left|S_j'\right|}$

und mit Cauchy-Schwarzscher Ungleichung: $\sum\limits_{j \in OPT_i} \sqrt{\left|S_j'\right|} \leq \sqrt{|OPT_i|} \sqrt{\sum\limits_{j \in OPT_i} |S_j|}$

Weiter gilt: $|OPT_i| \leq |S_i'|$ und $\sum\limits_{j \in OPT_i} |S_j| \leq m$

und insgesamt: $\sum\limits_{j \in OPT_i} v_j' \leq \sqrt{m} v_i' \Rightarrow \sum\limits_{i \in OPT} v_i' \leq \sum\limits_{i \in W} \sum\limits_{j \in OPT_i} v_j' \leq \sqrt{m} \sum\limits_{i \in W} v_i'$

2.6 LP-Relaxation und duale LP-Relaxation

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, dass Algorithmen, bzw. Mechanismen konstruiert werden können, mit denen man approximative Lösungen des Zuweisungsproblems erreichen kann. Man kann so die optimale Verteilung innerhalb einer gewissen Genauigkeit bestimmen. Die oben angegebene Präzision der Schätzung hängt allerdings fix von der Größe der Eingabe, genauer der Menge der Güter m ab. Damit lässt sich also bei fest vorgegebener Größe nicht immer die gewünschte Genauigkeit erreichen. Ist also die oben angegebene Genauigkeitsschranke nicht exakt genug, dann sind andere Werkzeuge notwendig, um hilfreiche Ergebnisse zu erzielen.
Es sollte hier daran erinnert werden, dass die Tatsache der NP-Vollständigkeit eines Problems bedeutet, dass sich kein Verfahren finden lässt, das das Problem für alle möglichen Eingaben in polynomieller Zeit berechnet. Es bedeutet nicht, dass sich nicht ein Verfahren finden lässt, das für einen Teil der Eingaben eine polynomielle Laufzeit erreichen kann. Tatsächlich vermögen die hier thematisierte *LP-Relaxation* und die ihr zugehörige *duale LP-Relaxation*, die auf der Betrachtung eines Linearen Programms basieren, das Zuweisungsproblem für einen Großteil der relevanten Eingaben sehr effizient zu lösen.
Der wesentliche Trick bei dem relaxierten LP und dualen relaxierten LP besteht, kurz gesagt, darin, dass man zunächst die Menge der möglichen Lösungen vergrößert, um in polynomieller Laufzeit die optimale Lösung berechnen zu können. Genauer formuliert, gibt man zunächst die Ganzzahligkeit der Variablen auf, löst dann das Lineare Programm, und verwendet diese Lösung, um Aussagen über die Lösung des ursprünglichen ganzzahligen Problems treffen zu können.
Man kann das oben thematisierte Zuweisungsproblem also als *ILP*, als *Integer Linear Program* beschreiben:

1. Maximiere $\sum\limits_{i \in N, S \subseteq M} x_{i,S} v_i(S)$

   so dass:

2. für alle $j \in M$: $\sum\limits_{i \in N, S | j \in S} x_{i,S} \leq 1$

3. für alle $i \in N$: $\sum\limits_{S \subseteq M} x_{i,S} \leq 1$

4. für alle $i \in N, S \subseteq M$: $x_{i,S} \in \{0, 1\}$

Die Variablen, über die maximiert werden soll, sind hier mit $x_{i,S}$ gekennzeichnet. Dabei gilt, dass $x_{i,S} = 1$, falls der Bieter i die Gütermenge S erhält, und $x_{i,S} = 0$ sonst.
Offensichtlich ist der soziale Nutzen gerade in 1) formuliert, denn: Erhält Bieter i das Bündel S, trägt dies eben gerade einen Wert von $v_i(S)$ zum sozialen Nutzen bei. Dieser soziale Nutzen soll maximiert werden mithilfe einer Verteilung, die bestimmt, welcher Bieter was erhält.
Bedingung 2) sichert, dass jedes Gut j an maximal einen Bieter i versteigert wird. Aus der Menge der Gütermengen, die j enthalten, darf maximal eine Gütermenge an maximal einen Bieter vergeben werden. Für alle anderen $x_{i',S'}$ muss dann gelten: $x_{i',S'} = 0$.
Bedingung 3) sichert, dass jeder Bieter maximal eine Ressourcenteilmenge erhält. Analog zu Bedingung 2) ist diese Forderung durch die spezielle Formulierung der Summe gegeben, die besagt, dass es über alle Teilmengen von M summiert, nur eine Teilmenge S geben darf, für die $x_{i,S} = 1$ gelten darf.
In Bedingung 4) wird schließlich die Ganzzahligkeit der Lösung gefordert. Diese Forderung ist ausschlaggebend für die hohe Komplexität des Problems, aber im Bereich der kombinatorischen Auktionen zunächst eine nicht vernachlässigbare Eigenschaft. Ein Bieter kann schließlich ein Paket nicht nur zur Hälfte erhalten, also mit einem oder mehreren anderen Bietern teilen. Er erhält vielleicht ein kleineres Paket, aber auch dieses erhält er eben vollständig oder gar nicht.

Zunächst ein kleiner Exkurs zu Linearen Programmen im Allgemeinen. Eine lineare Optimierungsaufgabe unter Nebenbedingungen kann wie in der oben dargestellten *Standardform* als Lineares Programm dargestellt werden. Im Normalfall gibt es aber keine Bedingung der Ganzzahligkeit, sondern nur der Nichtnegativität an die Variablen des Programms.

Man kann sich eine Optimierungsaufgabe unter diesen Gesichtspunkten auch geometrisch veranschaulichen.
Man sucht ja zunächst einmal Lösungen für beispielsweise ein Maximierungsproblem. Die verwendeten Variablen sind Elemente irgendeiner Art von Definitionsmenge. Die gegebenen Bedingungen grenzen diese Definitionsmenge zu unterschiedlichen Richtungen hin ab. Bei Linearen Programmen sind diese Nebenbedingungen ebenfalls linear, man kann sich diese Abgrenzungen also beispielsweise als Hyperebenen, bzw. als Geraden vorstellen, die die Definitionsmenge „zuschneiden“, bis schließlich eine

Art konvexer Polyeder im jeweiligen Raum übrig bleibt. Es ist allerdings anzumerken, dass Bedinungen so formuliert sein können, dass entweder ein leerer Polyeder (z.B.: $x \leq 1 \wedge x \geq 2$), oder eine in mindestens eine Richtung unbeschränkte Definitionsmenge (z.B.: $x \geq 1 \wedge x \geq 2$) zurückbleibt. Im ersten Fall ist das Problem offensichtlich unlösbar, im zweiten prinzipiell auch, wenn wegen dieser Unbeschränktheit beliebig hohe Zielwerte erreicht werden können. Hier soll aber zunächst ein lösbares Problem zur Veranschaulichung der Behandlung solcher Probleme thematisiert werden.
Der zu maximierende Term, hier auch als *Zielfunktion* bezeichnet, ist in einer Linearen Optimierungsaufgabe ja ebenfalls linear, er gibt also eine genau bestimmte Richtung an, in die der Zielwert der Optimierungsaufgabe immer weiter steigt. Ist der Bereich der zulässigen Lösungen durch einen oben vorgestellten beschränkten Polyeder gegeben, so gibt es in diesem konvexen Polyeder einen oder mehrere Punkte, die die Zielfunktion maximieren. Es wurde bewiesen und ist nach kurzer Überlegung auch relativ leicht nachvollziehbar, dass dieses Maximum an einer Ecke des Polyeders angenommen wird, oder dass eine Kante des Polyeders die Lösungsmenge bildet, und jeder Punkt auf dieser Kante die Zielfunktion maximiert.
Liegt nun eine solche Optimierungsaufgabe vor, gibt es verschiedene Methoden und Alogrithmen, die in vielen Fällen in polynomieller Zeit eine Lösung berechnen können. Als Beispiel hierfür seien der *Simplexalgorithmus* sowie die *Innere-Punkte-Verfahren* genannt, die vereinfacht ausgedrückt einen „Weg“ entlang der Kanten des Polyeders oder durch den Polyeder selbst suchen, und so den Punkt zu finden, der die Zielfunktion maximiert. Diese Verfahren sind allerdings etwas instabil bzgl. *worst cases* oder geringen Veränderungen der Nebenbedingungen. Als theoretisches Verfahren sei noch kurz die *Ellipsoidmethode* erwähnt, die verwendet wird, um generell etwas über die Lösbarkeit eines gegebenen LP auszusagen.
Nun war aber das Ausgangsproblem ja ganzzahlig, wozu also dieser Ausblick auf Lösungsverfahren für allgemeine Lineare Optimierungsaufgaben? Tatsächlich lässt sich mithilfe einer nicht-ganzzahligen optimalen Lösung des Problems einiges über die Lösung des ganzzahligen Problems aussagen, und dies immerhin in polynomieller Laufzeit.
An dieser Stelle wird nun also das oben vorgestellte ganzzahlige Lineare Programm *relaxiert*, das bedeutet, dass die Menge der zulässigen Lösungen durch Hinzunahme weiterer Elemente echt vergrößert wird. Im behandelten Fall bedeutet dies, dass man zunächst von „teilbaren“ Gütern ausgeht, dass also eben gerade nicht gelten muss $x_{i,S} \in \{0, 1\}$, sondern stattdessen $x_{i,S} \in [0, 1]$. Dabei wird weiter gefordert, dass ein Bieter nicht mehr als das Ganze eines Pakets erhalten kann. Übertragt man auch

Bedingung 2) und 3) auf teilbare Güter, so ergibt sich das folgende relaxierte LP:

1. Maximiere $\sum_{i \in N, S \subseteq M} x_{i,S} v_i (S)$

   so dass:

2. für alle $j \in M$: $\sum_{i \in N, S | j \in S} x_{i,S} \leq 1$

3. für alle $i \in N$: $\sum_{S \subseteq M} x_{i,S} \leq 1$

4. für alle $i \in N, S \subseteq M$: $x_{i,S} \in [0,1]$

Jedem Linearen Programm, als *primalem Programm*, ist ein *duales Programm* zugeordnet.
Für das betrachtete relaxierte LP erhält man das folgende duale relaxierte LP, u_i beschreibt dabei den Nutzen des Bieters i, p_j den Preis des Gutes j:

1. Minimiere $\sum_{i \in N} u_i + \sum_{j \in M} p_j$

   so dass

2. für alle $i \in N, S \subseteq M$: $u_i + \sum_{j \in S} p_j \geq v_i (S)$

3. für alle $i \in N, j \in M$: $u_i \geq 0, p_j \geq 0$

Das duale relaxierte LP versucht offensichtlich, Preise und Nutzen der Bieter zu minimieren. Es ist klar, dass der soziale Nutzen durch niedrige Güterpreise „leichter" optimiert werden kann, außerdem soll kein Bieter einen großen Nutzen aus der Güterverteilung ziehen, in dem Sinn, dass er mehr erhält, als er bereit wäre zu zahlen. Preise müssen aber so gewählt, und Nutzen so gedeckt werden, dass der jeweilige Bieter i noch bereit ist, für das entsprechende Bündel S zu steigern, dass also bei entsprechenden Preisen der Nutzen des Bieters bei Erhalt von Bündel S mindestens so hoch ist, wie der Wert des jeweiligen Bieters für dieses Bündel abzüglich der Preise, die er für dieses Bündel zahlen muss. Es muss also gelten: $u_i \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$ Dies wird in Bedingung 2) des dualen relaxierten LP gefordert.

Betrachtet man das obige duale relaxierte LP des ursprünglichen relaxierten LP, so sind sofort einige Zusammenhänge auffällig:
Zum einen wurde aus dem Maximierungsproblem nun ein lineares Minimierungsproblem, die Abschätzungen nach oben werden zu Abschätzungen nach unten. Zum anderen scheinen die Kardinalitäten bzgl. Variablen und Nebenbedingungen „vertauscht“. So gibt es im relaxierten LP eine exponentielle Anzahl von Variablen, aber nur $n + m$ Nebenbedingungen. Im dualen relaxierten LP verhält es sich gerade andersherum. Hier wird über genau $n + m$ Variablen minimiert, und zwar unter exponentiell vielen Nebenbedingungen. Dies ist nicht zufällig so. Vielmehr entspricht jeder Variablen im primalen Problem eine Bedingung im dualen Problem, und jede Bedingung des primalen Problems wird zu einer Variablen im dualen Problem. Für die Preise p für jedes Gut ist es beispielsweise entscheidend, wie viele Bieter dieses Gut ersteigern möchten. Jede Variable p_j im dualen relaxierten LP entspricht also einer Bedingung 2) aus dem relaxierten LP der Form $\sum_{i \in N, S | j \in S} x_{i,S} \leq 1$ für das entsprechende Gut j.

Vor diesem Hintergrund ist auch leicht einzusehen, dass das Dualproblem eines Dualproblems wieder das ursprüngliche primale Problem selbst ist. Es wird zweimal hintereinander „getauscht“.

Das duale Problem liefert außerdem auch Präzisierungen der möglichen optimalen Lösung des primalen Problems. So gilt zum Beispiel, dass der Zielfunktionswert der Minimimierungsaufgabe des dualen Problems immer höher ist als der Zielfunktionswert der Maximierungsaufgabe im primalen Problem. Dies ist im betrachteten Fall durchaus sinnvoll, denn der gesamte soziale optimale Nutzen kann doch höchstens so groß sein wie die Gesamtsumme aller Bieternutzen (vor allem der Gewinner) und der Güterpreise (für versteigerte Güter). Die Minimierungsaufgabe im dualen Problem stellt also quasi die Suche nach der kleinsten oberen Schranke für den Zielfunktionswert des eigentlichen Problems dar. In exakter mathematischer Formulierung erhält man 2 Dualitätsaussagen:

1. Schwacher Dualitätssatz: Seien x eine zulässige Lösung für das primale Maxi-

mierungsproblem, und y eine solche für das duale Minimierungsproblem, dann ist der Zielfunktionswert des dualen Problems für y mindestens so hoch wie der Zielfunktionswert des primalen Problems für x.

2. Starker Dualitätssatz: Besitzt eines der beiden Probleme eine beschränkte Optimallösung, so auch das andere, und es gilt: Die Zielfunktionswerte der Maximierungsaufgabe und der Minimierungsaufgabe sind gleich.

Dieser theoretische Hintergrund bietet nun die Basis, wie genau in polynomieller Laufzeit etwas über die ganzzahlige Lösung des ursprünglich betrachteten Problems ausgesagt werden kann. Denn bekannt ist nun folgendes:

1. Ist das Problem lösbar, so besitzen primales und duales Problem denselben Zielfunktionswert.

2. Eine im relaxierten LP bestimmte optimale Lösung des primalen Problems ist mindestens so gut wie die optimale ganzzahlige Lösung des Problems, denn in der Relaxation wird ja die Definitionsmenge echt vergrößert, ganzzahlige optimale Lösungen sind also bereits in der Definitionsmenge enthalten. Die im relaxierten LP bestimmte optimale Lösung ist damit eine Abschätzung des optimalen Zielfunktionswertes nach oben.

3. Entsprechendes lässt sich über das duale Problem im dualen relaxierten LP aussagen. Die optimale Lösung des dualen relaxierten LP gibt damit eine untere Schranke des gesuchten Zielfunktionswertes an.

Zusammengenommen ergibt sich also ein, je nach Problem, stark eingeschränkter möglicher Bereich für den optimierten Zielfunktionswert, und damit, wegen Konvexität, auch für die Lösung des Problems. Dieser Bereich lässt sich durch Hinzunehmen weiterer Ungleichungen weiter verkleinern.

Ein in der Praxis häufig eingesetztes Verfahren zur Lösung solcher Probleme ist das sogenannte *Branch-and-Cut*-Verfahren, eine Kombination des *Schnittebenen-Verfahrens* und des *Branch-and-Bound*-Verfahrens.
Prinzipiell basiert das Verfahren auf folgendem Schema:

1. Berechne die Lösung des relaxierten LP

2. Falls diese Lösung ganzzahlig ist, akzeptiere Lösung und beende

3. Falls diese Lösung nicht ganzzahlig ist, dann füge eine weitere Nebenbedingung so ein, dass alle ganzzahligen Lösungen erhalten bleiben, die gefundene nicht-ganzzahlige Lösung aber nicht mehr zulässig ist. Gehe dann zu 1)

Der Polyeder wird also so lange „zugeschnitten“, denn es werden ja quasi nicht-ganzzahlige Lösungen abgeschnitten, bis letztlich eine ganzzahlige Lösung gefunden wurde.

Als Beispiel dafür, wie mithilfe der LP-Relaxation und der dualen LP-Relaxation das dargestellte Zuweisungsproblem gelöst werden kann, sei hier nocheinmal folgende Situation betrachtet:

Der Einfachheit und Übersichtlichkeit der Rechnung wegen, soll es hier wieder bei zielstrebigen Geboten bleiben. Es seien daher:

- $N = \{$ Peter, Anne, Michael, Julia $\}$ die Menge der Bieter
- $M = \{a, b, c, d\}$ die Menge der Güter
- die zielstrebigen Gebote wie folgt:
  - für Peter: $v_{Peter}(\{a, b, c\}) = 8$
  - für Anne: $v_{Anne}(\{a, b\}) = 7$
  - für Michael: $v_{Michael}(\{c, d\}) = 5$
  - für Julia: $v_{Julia}(\{d\}) = 3$

Damit sind alle Wertfunktionen vollständig bekannt, und die Zielfunktion für das relaxierte Problem kann bestimmt werden. Da hier von zielstrebigen Geboten ausgegangen wurde, werden in der folgenden Formulierung der Zielfunktion bereits alle Summanden, die durch diese Eigenschaft ohnehin zu Null werden, nicht angeführt. Beispielsweise braucht eine Variable $x_{Peter,\{d\}}$ bei der Maximierung nicht berücksichtigt werden, da für den zugehörigen „Koeffizienten“ gilt: $v_{Peter}(\{d\}) = 0$.
Eine Einsetzung der exemplarischen Werte liefert somit folgendes relaxiertes LP:
Maximiere:
$8 \cdot x_{Peter,\{a,b,c\}} + 8 \cdot x_{Peter,\{a,b,c,d\}} + 7 \cdot x_{Anne,\{a,b\}} + 7 \cdot x_{Anne,\{a,b,c\}} + 7 \cdot x_{Anne,\{a,b,d\}} + 7 \cdot x_{Anne,\{a,b,c,d\}} + 5 \cdot x_{Michael,\{c,d\}} + 5 \cdot x_{Michael,\{b,c,d\}} + 5 \cdot x_{Michael,\{a,c,d\}} + 5 \cdot x_{Michael,\{a,b,c,d\}} + 3 \cdot x_{Julia,\{d\}} + 3 \cdot x_{Julia,\{a,d\}} + 3 \cdot x_{Julia,\{b,d\}} + 3 \cdot x_{Julia,\{c,d\}} + 3 \cdot x_{Julia,\{a,b,d\}} + 3 \cdot x_{Julia,\{b,c,d\}} + 3 \cdot x_{Julia,\{a,c,d\}} + 3 \cdot x_{Julia,\{a,b,c,d\}}$

Berücksichtigt man nun Bedingung 2) des relaxierten LP, so ergeben sich gerade für jedes Gut eine, also insgesamt 4 Nebenbedingungen, die besagen, dass dieses

entsprechende Gut eben insgesamt nur maximal ein Mal vergeben werden darf. Für das Gut a ergibt sich beispielsweise die folgende Nebenbedingung:
$x_{Peter,\{a,b,c\}} + x_{Peter,\{a,b,c,d\}} + x_{Anne,\{a,b\}} + x_{Anne,\{a,b,c\}} + x_{Anne,\{a,b,d\}} + x_{Anne,\{a,b,c,d\}} + x_{Michael,\{a,c,d\}} + x_{Michael,\{a,b,c,d\}} + x_{Julia,\{a,d\}} + x_{Julia,\{a,b,d\}} + x_{Julia,\{a,c,d\}} + x_{Julia,\{a,b,c,d\}} \leq 1$

Bedingung 3) des relaxierten LP besagt nun, dass jeder Bieter insgesamt nur maximal ein Paket erhalten darf. Es ergeben sich hier also für jeden Bieter eine Nebenbedingung, damit insgesamt 4 Nebenbedingungen. Im Falle von Peter wäre die Nebenbedingung also:
$x_{Peter,\{a,b,c\}} + x_{Peter,\{a,b,c,d\}} \leq 1$

Unter Berücksichtigung des zulässigen Bereiches für die $x_{i,S}$ lässt sich nun mit einem beliebigen oben vorgestellten Verfahren, z.B. dem Simplex-Algorithmus eine Lösung berechnen. Führt man diese Rechnung durch, so erhält man als optimalen Zielfunktionswert den Wert 12.
Dieser Wert stellt also auf jeden Fall, gemäß oben stehender Begründung, eine obere Schranke für den durch ganzzahlige Lösungen erreichbaren optimalen Wert dar.

Für eine mögliche untere Schranke stelle man nun auch das duale relaxierte LP auf:
Dieses lautet hier:
Minimiere:
$u_{Peter} + u_{Anne} + u_{Michael} + u_{Julia} + p_a + p_b + p_c + p_d$

Für jeden Bieter und für jede Teilmenge der Gütermenge existiert nun prinzipiell eine Nebenbedigung. Für Bieter Anne und die Gütermenge $\{a, b, c\}$ ergebe dies
$u_{Anne} + p_a + p_b + p_c \geq v_{Anne}(\{a, b, c\}) = 7$
Hierbei werden allerdings wieder die Nebenbedingungen ausgelassen, die durch die Eigenschaft der zielstrebigen Gebote wegfallen. Eine solche Nebenbedingung wäre beispielsweise der Gestalt: $u_{Peter} + p_d \geq v_{Peter}(\{d\}) = 0$ Da aber die Nutzen u_i sowie die Preise p_j ohnehin positiv sein müssen, sind diese Nebenbedingungen bereits in jedem Falle erfüllt und damit überflüssig.

Damit lässt sich nun wieder eines der oben vorgestellten Verfahren zur Lösung des dualen relaxierten LP verwenden.
Auch hier geben entsprechende Verfahren ein Minimum der Zielfunktion bei dem Wert 12 an.

Insgesamt lässt sich damit also für dieses Zuweisungsproblem feststellen, dass sowohl die untere als auch die obere Schranke des optimalen sozialen Nutzen bei 12 liegt. Mit dieser Information fällt es nun leicht, eine ganzzahlige Lösung zu finden, die einen sozialen Nutzen von 12 ergibt, nämlich gerade: $x_{Anne,\{a,b\}} = 1$ und $x_{Michael,\{c,d\}} = 1$ und $x_{i,S} = 0$ für alle anderen i, S.
Dies entspricht sowohl dem Ergebnis, das zuvor durch den Greedy Algorithmus bestimmt wurde, als auch der intuitiven Erwartung, dass eben gerade Anne und Michael ihre gewünschten Güter erhalten, und Peter und Julia leer ausgehen müssen, um den sozialen Nutzen zu optimieren.

2.7 Iterative Auktionen

In den vorangegangenen Kapiteln wurde sich vor allem mit der Frage der Berechnungskomplexität der kombinatorischen Auktionen beschäftigt. Es wurde hierzu der Spezialfall der zielstrebigen Bieter untersucht, und NP-Vollständigkeit des Zuweisungsproblems nachgewiesen. Als Konsequenz wurden approximative und heuristische Lösungsversuche beleuchtet, stets allerdings mit dem Zuweisungsproblem für zielstrebige Bieter als Ankerpunkt.

Obgleich dies einen guten komplexitätstheoretischen Einblick über die kombinatorischen Auktionen gibt, so ist das zugrundeliegende Modell der zielstrebigen Bieter doch sehr konstruiert und unrealistisch. Im Folgenden soll ein Vorschlag für eine mögliche Verallgemeinerung der zielstrebigen Gebote dargestellt werden. Im Modell der *Iterativen Auktionen* wird erstmals der Auktionär relevant, und die Interaktion zwischen Bieter und Auktionär hat Einfluss auf den Verlauf der Auktion, also auf die Verteilung der Güter auf die Bieter.
Der Auktionär tritt in diesem Modell als Anbieter von Gütern auf, wobei er jedes einzelne Gut zu einem bestimmten Preis anbietet. Derjenige Bieter, der ein Gut erhält, muss also dafür etwas zahlen. Für die Bieter hat nun jede mögliche Teilmenge der Gütermenge einen bestimmten Wert. Anders als bei den zielstrebigen Geboten gibt es aber nicht nur eine Teilmenge von Gütern, die ein Bieter erhalten möchte, stattdessen bringen ihm unterschiedliche Teilmengen unterschiedlich viel. Bei einer bestimmten gegebenen Preislage sucht sich jeder Bieter dann die Gütermenge aus, die ihm am meisten bringt, die also für ihn abzüglich des Preises am meisten Wert beinhaltet.
Die Interaktion besteht nun zwischen Auktionär und Bietern in der Form, dass beide Seiten, also der Auktionär und der jeweilige Bieter Kenntnis darüber haben, welchen Preis eine bestimmte Teilmenge der Gütermenge besitzt, und welche Teilmenge schließlich von diesem Bieter erworben wird. Wie genau dieser Informationsaustausch effizient stattfinden kann, soll im Folgenden untersucht werden.

Im Grunde genommen wären hierbei zunächst zwei Möglichkeiten denkbar:

Definition 6: *Wertanfrage*
Bei einer Wertanfrage präsentiert der Auktionär einem Bieter eine Gütermenge, und der Bieter nennt den Preis, den er bereit wäre, dafür maximal zu zahlen.

Definition 7: *Bedarfsanfrage*
Bei einer Bedarfsanfrage nennt der Auktionär für jedes Gut einen Preis, und jeder Bieter nennt die gewünschte Gütermenge, die ihm bei dieser Preislage am meisten Wert bringt.

Die deutlich stärkere Aussagekraft der Bedarfsanfrage mag der nächste Satz aufzeigen:

Satz 3:

1. Eine Wertanfrage kann durch $m \cdot t$ viele Bedarfsanfragen dargestellt werden, wobei t die Anzahl der Präzisionsbits der Werte darstellt.
2. Eine Bedarfsanfrage benötigt zur Darstellung bis zu exponentiell viele Wertanfragen.

Beweis

1. Eine Wertanfrage bekommt eine bestimmte Teilmenge S der Gütermenge als Eingabe, und liefert dafür einen bestimmten Wert v für dieses Bündel zurück.

   Dies lässt sich symbolisieren durch sogenannte *marginale* Bedarfsanfragen.

   In einer marginalen Bedarfsanfrage wird für eine bestimmte Teilmenge S' und $j \in M - S'$ nur der Wert $v' = v(S' \cup \{j\}) - v(S')$ bestimmt, also der Wert, den das Gut j zusätzlich bringt, wenn das Bündel S' schon erhalten wurde. Dies mag vielleicht umständlich erscheinen, allerdings ist zu berücksichtigen, dass ja durch eine Bedarfsanfrage angegeben wird, welchen Wert ein komplettes Paket für einen Bieter hat. Wie bereits zuvor erwähnt, muss dies nicht der Summe der Einzelwerte entsprechen.

   Nun wird nacheinander für jedes Gut aus S eine solche Bedarfsanfrage gestellt. Dabei kann in einer Bedarfsanfrage der Auktionär den Preis eines jeden Gutes vorgegeben. Um also obige marginale Anfragen zu lösen, können die Preise für alle Güter aus S' auf 0 gesetzt werden, denn es soll ja nur darum gehen, wieviel dem Bieter das Gut j zusätzlich wert ist. Alle Güter $i \notin (\{j\} \cup S')$ haben einen Preis von unendlich, damit sie für den Bieter uninteressant bleiben. Der Preis von Gut j kann nun über binäre Suche ermittelt werden, der höchste erreichbare Preis, zu dem der Bieter das Bündel ersteigern möchte, ist dabei der marginale Wert von j.

Solche marginalen Bedarfsanfragen sind also für jedes Gut zu stellen, und zwar je nach binärer Genauigkeit entsprechend pro Gut und pro Präzisionsbit einmmal. Insgesamt ergeben sich also $m \cdot t$ Bedarfsanfragen.

2. Hierfür überlege man sich folgendes Beispiel:

   Es sei $m = n$, es gibt also gleichviele Bieter wie ersteigerbare Güter. Jeder Bieter präferiert nun ein bestimmtes Güterbündel der Größe $\frac{m}{2}$, alle anderen Güter haben für ihn den Wert 0. Seine Wertverteilung soll dabei so sein, dass für ihn ein ganz bestimmtes Gut sehr hohen Wert haben soll, und alle zusätzlichen Güter nur noch einen sehr geringen Zugewinn bedeuten. Insgesamt sollen die Wertvorstellungen der Bieter so verteilt sein, dass jedes Gut von genau einem Bieter auf obige Weise stark erwünscht wird.

   Stellt man nun an diese Ausgangssituation eine Bedarfsanfrage, wobei die Preise für jedes Gut durchschnittlich sind, dann wird jeder Bieter sein am wertvollstes Gut ersteigern. Die jeweils anderen Güter, die er erwünscht, und die eine Kollision mit den Wünschen anderer Bieter verursachen würden, sind für ihn uninteressant dadurch, dass er für einen durchschnittlichen Preis, den er zahlen müsste, nur sehr wenig Gewinn erzielen würde. Aus den gegebenen Voraussetzungen kann damit die Gütermenge problemlos auf die Bieter aufgeteilt werden. Um die optimale Verteilung zu bestimmen, ist also nur eine Bedarfsanfrage zu stellen.

   Versucht man nun, die optimale Verteilung mithilfe von Wertanfragen zu ermitteln, müssen zunächst Anfragen für unterschiedliche Teilmengen der Gütermenge gestellt werden. Um für jeden Bieter einzeln herausfinden zu können, welches der von ihm gewünschten Güter nun das am stärksten präferierte ist, müssen exponentiell viele Wertanfragen gestellt werden. Erst wenn diese Güter bestimmt wurden, kann auch die optimale Verteilung bestimmt werden.

In diesem Kapitel wurde bisher aufgezeigt, wie iterative Auktionen ablaufen, und welche Rolle Bedarfsanfragen dabei spielen. Nun soll kurz umrissen werden, wie eine solche iterative Auktion mithilfe der LP-Relaxation und der dualen LP-Relaxation so modifiziert werden kann, dass die optimale Verteilung effizient berechnet werden kann.
Im Grunde genommen besteht das Problem darin, dass zunächst exponentiell viele Variablen im relaxierten LP vorliegen. Betrachtet man hier das Dualproblem, so lässt sich diese exponentielle Anzahl reduzieren, und das Dualproblem dieses reduzierten dualen relaxierten LP liefert schließlich ein relaxiertes LP mit polynomieller Anzahl Variablen.

Es sei also zunächst nocheinmal die LP-Relaxation für eine iterative Auktion betrachtet:

1. Maximiere $\sum\limits_{i \in N, S \subseteq M} x_{i,S} v_i(S)$

   so dass:

2. für alle $j \in M$: $\sum\limits_{i \in N, S | j \in S} x_{i,S} \leq 1$

3. für alle $i \in N$: $\sum\limits_{S \subseteq M} x_{i,S} \leq 1$

4. für alle $i \in N, S \subseteq M$: $x_{i,S} \geq 0$

Betrachtet man dieses relaxierte LP, so ist offensichtlich, dass in 1) durch $S \subseteq M$ bereits exponentiell viele Variablen vorliegen, über die maximiert werden muss. Die Anzahl der Bedingungen die für 2) und 3) erfüllt werden müssen ist gerade $n + m$. Betrachte nun das duale realxierte LP:

1. Minimiere $\sum\limits_{i \in N} u_i + \sum\limits_{j \in M} p_j$

   so dass

2. für alle $i \in N, S \subseteq M$: $u_i + \sum_{j \in S} p_j \geq v_i(S)$

3. für alle $i \in N, j \in M$: $u_i \geq 0, p_j \geq 0$

Das duale realxierte LP des ursprünglichen relaxierten LP besitzt $n+m$ Variablen, über die minimiert werden muss. Es liegen nun entsprechend exponentiell viele Bedingungen vor, die eingehalten, bzw. überprüft werden müssen. Diese Überprüfung hat nun entweder zum Ergebnis, dass eine mögliche Lösung die Bedingungen erfüllt, oder eben nicht.
Man betrachte nun also eine mögliche Lösung (u, p).
Für das duale relaxierte LP lässt sich 2) umschreiben zu $u_i \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$.
Der Preisvektor p wird dabei durch die betrachtete mögliche Lösung vorgegeben. Durch eine Bedarfsanfrage an Bieter i zu den Preisen p gibt dieser genau die Gütermenge S an, die die rechte Seite der obigen Ungleichung maximiert.
Soll also für die mögliche Lösung überprüft werden, ob sie Bedingung 2) erfüllt, so ist lediglich für jeden Bieter eine Bedarfsanfrage zu stellen, und die Bedingung nur für diese n Teilmengen der Gütermenge zu prüfen, anstelle von ursprünglich exponentiell vielen.

Das reduzierte duale relaxierte LP hat offensichtlich den gleichen Zielfunktionswert wie das ursprüngliche relaxierte LP. Wird nun das Dualproblem des reduzierten dualen relaxierten LP betrachtet, erhalten wir ein reduziertes relaxiertes LP, das aber dieselbe Lösung besitzt wie das relaxierte LP, von dem aus gestartet wurde.

3 Schluss

In der vorausgegangenen Ausarbeitung sollte dargestellt werden, worum es in kombinatorischen Auktionen geht, wo spieltheoretische, wo algorithmische Fragestellungen auftauchen. Es wurden hierbei die Rahmenbedingungen vorgestellt, sowie Möglichkeiten und Probleme vorgestellt, die bei gewissen Lösungsaussagen auftreten. Als zentrale Schwierigkeit sei hier nochmal die NP-Vollständigkeit des Zuweisungsproblems aufgeführt, die bei Lösungsalgorithmen für Zuweisungsprobleme zu berücksichtigen ist.
Als mögliche Verallgemeinerung von trivialen Fällen von kombinatorischen Auktionen wurden die Iterativen Auktionen aufgeführt.
Diese stellen aber nur eine der möglichen Verallgemeinerungen in diesem Gebiet dar. Dieses letzte Kapitel soll kurze Ausblicke auf mögliche weitere Ideen und offene Fragen geben, die in dieser Hausarbeit nicht beachtet wurden.

Eine weitere mögliche Ausprägung kombinatorischer Auktionen sind die sogenannten *preisansteigenden Auktionen*. Diese Auktionen kommen dem Begriff Auktion im Sinne von Versteigerungen von Gütern im praktischen Sinn sehr nahe.
Im Preisansteigenden Modell ist die grundlegende Idee die, dass mögliche konkurrierende Gebote von unterschiedlichen Bietern auf ein Gut auf die Art gelöst werden, dass die Preise für eben jene Güter solange stückweise erhöht werden, bis es nur noch einen Bieter gibt, der für dieses Gut bietet. Wie bei tatsächlichen Versteigerungen wird also auf diese Art ermittelt, welchem Bieter ein bestimmtes Gut am meisten Wert ist. Auch so kann eine optimale Verteilung erreicht werden.

Ein eher technischer Aspekt, der in dieser Ausarbeitung außer Acht gelassen wurde, aber dennoch für eine technische Umsetzung unbedingt notwendig ist, ist die Frage der Repräsentation der Gebote. Zunächstmal müssen bei kombinatorischen Auktionen in irgendeiner Weise die Gebote der einzelnen Bieter dargestellt werden. Die Komplexität dieser Gebote kann mitunter sehr hoch sein. Zunächst gilt ja, dass es exponentiell viele Teilmengen der Ressourcenmenge gibt, und jeder Bieter kann für jede dieser Teilmengen unterschiedliche, unabhängige Wertvorstellungen besitzen.
In dieser Frage gibt es zwei Richtungen, in die man sich bewegen kann. Die eine Richtung wäre, zu versuchen, die Gebote aus sehr elementaren, atomaren Bausteinen zusammenzubauen. Vorteilhaft wäre hierbei, dass man mitunter mit relativ wenig dieser Bausteine auskommen könnte, und jeder komplexere Term aus diesen Teilen bestünde. Dieser Effizienz steht allerdings die schwere Lesbarkeit gegenüber. Wird ein Gebot aus einer Vielzahl dieser atomaren Symbole durch unterschiedliche

Konstruktionen zusammengbaut, müssen zuerst alle diese Konstruktionsschritte entschlüsselt werden, bevor Informationen über das Gebot gewonnen werden können. Dies führt direkt zum anderen Vorschlag, ebenfalls mit nur teilweise befriedigendem Ergebnis. Man könnte ja genausogut versuchen, jedes Gebot so lesbar wie möglich darzustellen, um diese Komplexitätsanforderung zu minimieren. Allerdings führt dies über kurz oder lang dazu, dass vielmehr Symbole bekannt sein müssen. Alles was im obigen Vorschlag zusammengebaut werden konnte, zählt nun bereits zu den Grundbausteinen. Darunter leidet aber eben gerade die Effizienz beim Umgang mit dieser Repräsentationsform erheblich.

Ein zentraler Aspekt, der vor allem spieltheoretische Bezüge aufzeigt wurde ebenfalls in dieser Hausarbeit nicht behandelt. Strategiebildung und -findung ist ein sehr entscheidender Aspekt im Bezug auf Entscheidungen der Bieter, und ermöglicht eine breite Anwendung kombinatorischer Auktionen im Bereich der Spieltheorie.
In der bisherigen Ausarbeitung wurde immer davon ausgegangen, dass jeder Bieter im gewissen Sinn ehrlich handelt, also seine eigenen Wertvorstellungen zum einen genau kennt, und auch genau diese auf der Auktion mitteilt. Beides muss natürlich nicht der Fall sein. Es ist aus unterschiedlichen Gründen durchaus möglich, dass ein Bieter seine eigenen Präferenzen im Grunde genommen gar nicht exakt angeben kann. Noch interessanter ist allerdings der zweite Punkt, und die Frage, ob es für einen Bieter Vorteile bringt, wenn er bewusst falsche Informationen über seine eigenen Wertvorstellungen äußert.
Vor diesem Hintergrund lassen sich strategische Theorien untersuchen. Angenommen, ein Bieter hat gewisse Wertvorstellungen, äußert aber gegenüber dem Auktionär andere Wertvorstellungen. Die Wertangaben, die dann für das jeweils gewählte Lösungsverfahren als Eingabe dienen, sind ja ebenfalls die bewusst falschen. Ergibt sich daraus für den lügenden Bieter ein Vorteil, erhält er also beispielsweise die tatsächlich von ihm erwünschten Güter günstiger, oder erhält er mehr Güter, als wenn er seine wahren Wertvorstellungen bekanntgegeben hätte? Was passiert, wenn alle Bieter auf diese Art Fehlinformation äußern?
Dieser Aspekt lässt sich auch im Bezug auf die verwendeten Lösungsverfahren analysieren. So gibt es Lösungsverfahren, für die sich beweisen lässt, dass es für einen Bieter keine Vorteile bringt, falsche Information abzugeben. Der zuvor vorgestellte Greedy-Mechanismus für zielstrebige Bieter ist ein Beispiel für solche Algorithmen.