Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
PD Dr. Sven Kosub / Dr. Maciej Gratkowski

10. Übungsblatt

Ausgabe: 20.06.2013 **Abgabe:** 28.06.2013, bis spätestens 08:00 per Mail an den Tutor

Aufgabe 1: Universelle Funktion — 10 Punkte

Wir betrachten die Gödelisierung aller RAMs (siehe Skriptum) und definieren für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_i =_{\text{def}} \text{ die von der RAM } M_i \text{ berechnete einstellige Funktion}$$

Zeigen Sie, dass die *universelle Funktion*

$$u : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : (i, x) \mapsto \varphi_i(x)$$

berechenbar ist.

Aufgabe 2: Gödelisierung — 10 Punkte

Zeigen Sie, dass es berechenbare und totale Funktionen $r, s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ gibt mit

(a) $\varphi_{r(i,j)} = \text{sum}(\varphi_i, \varphi_j)$

(b) $\varphi_{s(i,j)} = \text{prod}(\varphi_i, \varphi_j)$

Hierbei verwenden wir die Nummerierung der Funktionen wie in Aufgabe 1.

Aufgabe 3: Unentscheidbarkeit — 10 Punkte

Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes von Rice aus der Vorlesung (siehe Skriptum). Zeigen Sie also folgende Aussage:

> Es sei $\mathcal{E} \subseteq \mathbf{RAM}$ mit $\mathcal{E} \neq \emptyset$ und $\mathcal{E} \neq \mathbf{RAM}$. Weiterhin gelte $\nu^1 \notin \mathcal{E}$. Dann ist die Menge
>
> $$\mathrm{C}(\mathcal{E}) =_{\text{def}} \{\ i \mid \text{RAM } M_i \text{ berechnet eine Funktion } \varphi \in \mathcal{E}\ \}$$
>
> unentscheidbar.

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie zeigen, dass unter der Annahme der Entscheidbarkeit von $\mathrm{C}(\mathcal{E})$ das spezielle Halteproblem K_0 entscheidbar ist.