Einführung in die Informatik 2

– Graphenexploration –

Sven Kosub

AG Algorithmik/Theorie komplexer Systeme
Universität Konstanz

E 202 | Sven.Kosub@uni-konstanz.de | Sprechstunde: nach Vereinbarung

Sommersemester 2010

Suche im Labyrinth

Aufgabe: Durchsuche ein Labyrinth

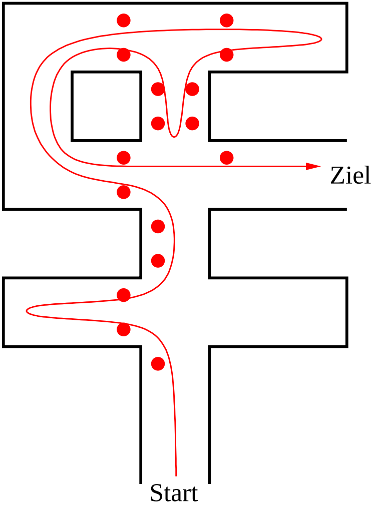
Präzisierung der Aufgabenstellung:

- Jede Kreuzung und Sackgasse soll irgendwann besucht werden
- Gehen von Kreisen soll verhindert werden

Suche im Labyrinth

Lösung:

- Verwende Markierungen an Kreuzungen
- wenn Sackgasse, dann Umdrehen
- wenn Kreuzung, dann beim Betreten Marke setzen und wie folgt verfahren:
    - keine Kreise: hat Gang, durch den man gekommen ist, gerade erst Marke bekommen und sind weitere Marken vorhanden, dann zweite Marke in Gang und umkehren
    - sonst neue Gänge: wenn Gänge ohne Marken vorhanden, den linkesten Gang nehmen und Marke setzen
    - Zurückgehen: umkehren und den Gang mit nur einer Marke nehmen



Graphenexploration

- Graphenexploration als Sammlung von Techniken zur „Erforschung“ unbekannter Graphen und Netzen hinsichtlich bestimmter Fragestellungen
- . . . mittels Graphtraversierung (in der Vorlesung)
- Graphtraversierung ist das Ablaufen aller Kanten eines Graphen
- Suche im Labyrinth ist Beispiel für Graphtraversierung

Traversierungsarten:

- Tiefensuche (engl. *depth-first search*, Abk. *dfs*)
- Breitensuche (engl. *breadth-first search*, Abk. *bfs*)

Tiefensuche

Idee bei der Tiefensuche:

- starte in einem Knoten
- gehe solange wie möglich zu einem benachbarten Knoten, der noch nicht besucht wurde
- falls im aktuellen Knoten alle Nachbarn bereits besucht, dann kehre auf dem gegangenen Weg zurück zum letzten Knoten, der einen noch nicht besuchten Nachbarn hat (backtracking)

Tiefensuche produziert zwei Arten von Kanten:

- Baumkanten
- Rückwärtskanten

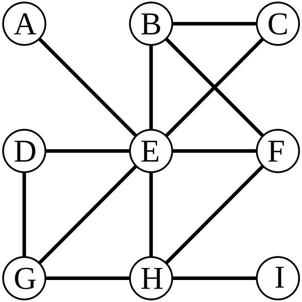
Tiefensuche

Algorithmus: DFS(G, v)

Eingabe: (ungerichteter) Graph G, Knoten v in G
Ausgabe: Markierung der Kanten als „Baumkante“ oder „Rückwärtskante“

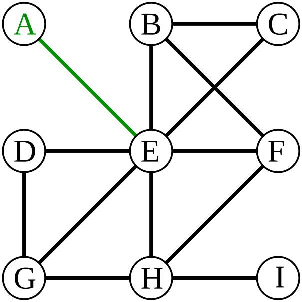
Markiere Knoten v als „besucht“
for jede mit v inzidente Kante $e = \{u, v\}$
  if Gegenknoten u nicht als „besucht“ markiert
    Markiere e als „Baumkante“
    Markiere u als „besucht“
    DFS(G, u)
  else Markiere e als „Rückwärtskante“

Tiefensuche



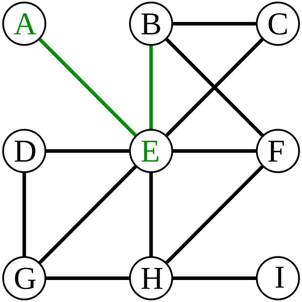
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Rückwärtskanten

Tiefensuche



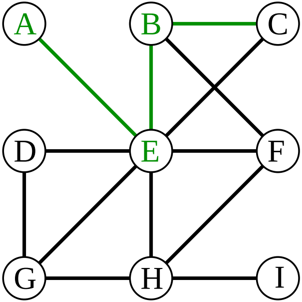
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Rückwärtskanten

Tiefensuche



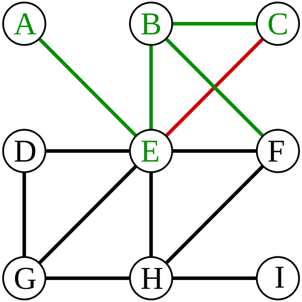
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Rückwärtskanten

Tiefensuche



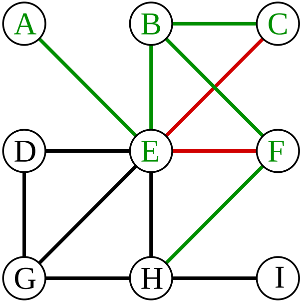
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Rückwärtskanten

Tiefensuche



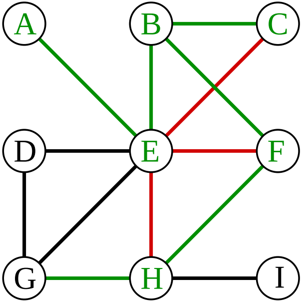
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Rückwärtskanten

Tiefensuche



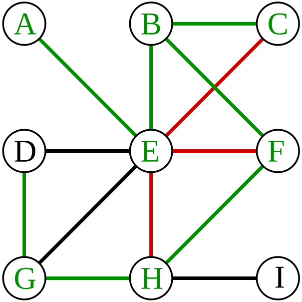
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Rückwärtskanten

Tiefensuche



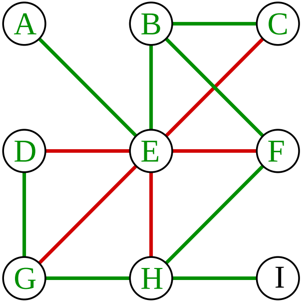
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Rückwärtskanten

Tiefensuche



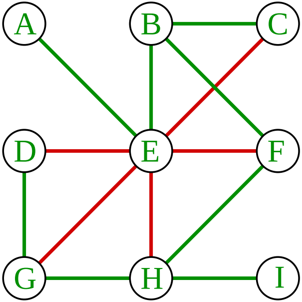
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Rückwärtskanten

Tiefensuche



- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Rückwärtskanten

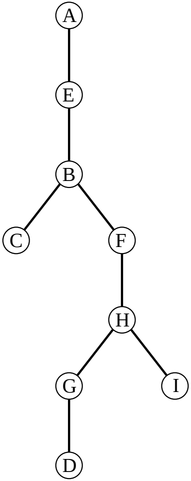
Tiefensuche



- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Rückwärtskanten

Tiefensuche

- Baumkanten bilden DFS-Baum
- falls G zusammenhängend, dann ist DFS-Baum ein Spannbaum
- Rückwärtskanten schließen Kreise
- DFS-Baum ändert sich, wenn inzidente Kanten in anderer Reihenfolge behandelt werden



Tiefensuche

Laufzeit der Tiefensuche:

- mit Ajdazenzlisten: $O(n+m)$ (da jede Kante genau zweimal durchlaufen wird)
- mit Adjazenzmatrix: $O(n^2)$ (da jede potenzielle Kante genau zweimal behandelt wird)

(zusätzlicher) Speicherplatz der Tiefensuche:

- proportional zur Höhe des DFS-Baums, d.h. $O(n)$ im schlechtesten Fall

Folgende Probleme sind mit Tiefensuche in Zeit $O(n+m)$ lösbar:

- Test, ob G zusämmenhängend ist
- Berechnung eines Spannwaldes von G
- Berechnung eines Pfades zwischen zwei Knoten von G
- Berechnung eines Kreises

Breitensuche

Idee bei der Breitensuche:

- starte in einem Knoten
- unterteile iterativ die Knoten in Levels
- ein Level der Ordnung i besteht aus allen Knoten, die Nachbarn im Level $i-1$ haben
- Startknoten bildet Level 0

Breitensuche produziert zwei Arten von Kanten:

- Baumkanten
- Querkanten

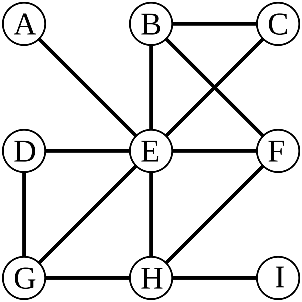
Breitensuche

Algorithmus: BFS(G, v)

Eingabe: (ungerichteter) Graph G, Knoten v in G
Ausgabe: Markierung der Kanten als „Baumkante“oder „Querkante“

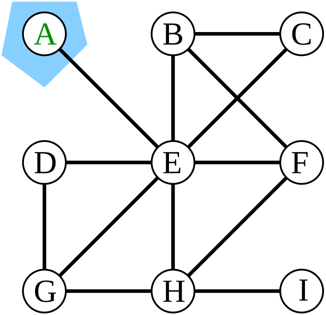
i=0
Initialisiere Liste L_0
Füge v in L_0 ein
Markiere v als „besucht“
while L_i nicht leer
    Initialisiere Liste L_{i+1}
    for jeden Knoten v in L_i
        for jede mit v inzidente Kante $e = \{u, v\}$
            if Gegenknoten u nicht als „besucht“ markiert
                Markiere e als „Baumkante“
                Füge u in L_{i+1} ein
                Markiere u als „besucht“
            else Markiere e als „Querkante“
    i=i+1

Breitensuche



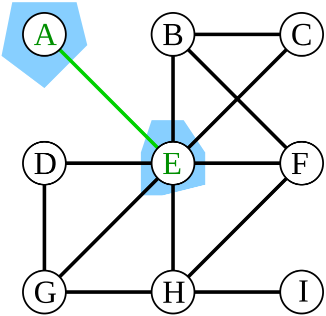
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Querkanten

Breitensuche



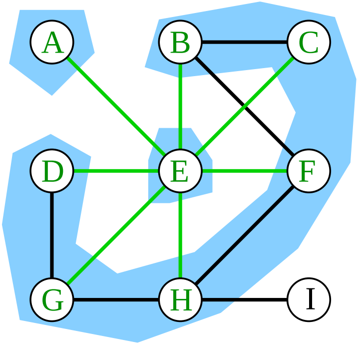
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Querkanten

Breitensuche



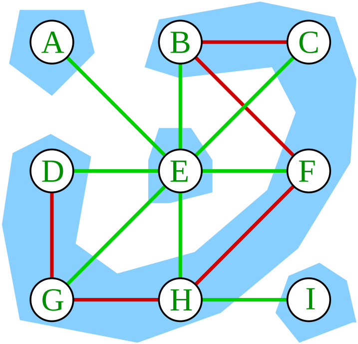
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Querkanten

Breitensuche



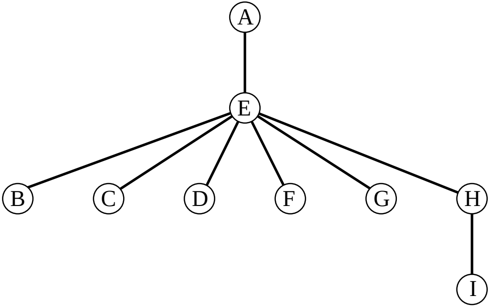
- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Querkanten

Breitensuche



- inzidente Kante nach alphabetischer Sortierung der Nachbarn
- Baumkanten
- Querkanten

Breitensuche



- Baumkanten bilden BFS-Baum
- falls G zusammenhängend, dann ist BFS-Baum ein Spannbaum
- Querkanten schließen Kreise
- Knotentiefen im BFS-Baum entsprechende kürzesten Pfaden der Knoten zu A

Breitensuche

Laufzeit der Breitensuche:

- mit Ajdazenzlisten: $O(n+m)$ (da jede Kante genau zweimal durchlaufen wird)
- mit Adjazenzmatrix: $O(n^2)$ (da jede potenzielle Kante genau zweimal behandelt wird)

(zusätzlicher) Speicherplatz der Breitensuche:

- $O(n)$ im schlechtesten Fall

Folgende Probleme sind mit Breitensuche in Zeit $O(n+m)$ lösbar:

- Test, ob G zusämmenhängend ist
- Berechnung eines Spannwaldes von G
- Berechnung eines kürzesten Pfades zwischen zwei Knoten von G
- Berechnung eines Kreises