

Einführung in die Informatik 2

– Mathematische Grundbegriffe –

Sven Kosub

AG Algorithmik/Theorie komplexer Systeme
Universität Konstanz

E 202 | Sven.Kosub@uni-konstanz.de | Sprechstunde: nach Vereinbarung

Sommersemester 2010

- (mathematischer) Begriff der Menge fundamental für nahezu alle Gebiete der Informatik
- verwenden intuitiven Mengenbegriff (daher auch „naive Mengenlehre“)
- Menge nach Georg Cantor (1895):

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

- Wieso **naiv**?
 - Was ist die „die Menge aller Mengen“?
 - Was ist „die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“?
 - Ausweg: **Typentheorie** (Russell), **axiomatische Mengenlehre** (Zermelo-Fraenkel-Axiome)

Darstellung von Mengen

- **extensional**: Angabe aller Elemente der Menge

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

- **intensional**: Angabe eines definierenden Ausdrucks E

$$\{x \mid E(x)\}$$

- $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $\{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl und } x \text{ ist ungerade und } x < 10\}$
- Menge, die kein Element enthält, heißt **leere Menge** und wird mit \emptyset bezeichnet

- bei extensionaler Darstellung spielt Reihenfolge der Elemente keine Rolle, d.h.

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{und} \quad \{5, 7, 3, 1, 9\}$$

beschreiben dieselbe Menge

sonst: Folgen oder Tupel

- Anzahl des Vorhandenseins eines Elementes irrelevant, d.h.

$$\{1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 9, 9, 9\}$$

beschreibt auch dieselbe Menge

sonst: Multimenge

- $e \in A$ steht für „Objekt e ist Element von A “
- Anzahl der Elemente von A heißt **Mächtigkeit** bzw. **Kardinalität** von A , symbolisch: $\|A\|$, $|A|$, $\#A$

beachte: mehrfach dargestellte Element werden nur einmal gezählt, d.h.

$$\|\{1, 3, 3, 1, 5, 5, 7, 5, 9, 3, 9, 9, 7\}\| = 5$$

- leere Menge hat Kardinalität 0, d.h. $\|\emptyset\| = 0$

Mengenvergleiche:

- $A \subseteq B$ steht für: A ist Teilmenge von B , d.h. jedes Element von A ist Element von B
- $A = B$ steht für: A und B sind gleich, d.h. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$
- $A \subset B$ steht für: A ist echte Teilmenge von B , d.h. $A \subseteq B$, aber A und B sind nicht gleich

negative Mengenvergleiche:

- $A \not\subseteq B$ steht für: A ist keine Teilmenge von B , d.h. mindestens ein Element von A ist nicht Element von B
- $A \neq B$ steht für: A und B sind nicht gleich, d.h. $A \not\subseteq B$ oder $B \not\subseteq A$
- $A \not\subset B$ steht für: A ist keine echte Teilmenge von B , d.h. $A \not\subseteq B$ oder $A = B$
- $e \notin A$ steht für: e ist nicht Element von A

Potenzmenge von A :

- Menge aller Teilmengen von A , symbolisch: $\mathcal{P}(A), 2^A$
- $B \in \mathcal{P}(A)$ genau dann, wenn $B \subseteq A$

Fakten:

- Es gilt stets $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ und $A \in \mathcal{P}(A)$
- Ist A endlich, so gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Für $A = \{0, 1\}$ gilt $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Grundlegende Operationen auf Mengen A und B :

- **Vereinigung:** $A \cup B =_{\text{def}} \{e \mid e \in A \text{ oder } e \in B\}$
- **Durchschnitt:** $A \cap B =_{\text{def}} \{e \mid e \in A \text{ und } e \in B\}$
- **Differenz:** $A \setminus B =_{\text{def}} \{e \mid e \in A \text{ und } e \notin B\}$

- $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$
- $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

- bezüglich fester Grundmenge M wird \bar{A} für $M \setminus A$ verwendet
- **de Morgan'sche Regeln:**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- A und B heißen **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt

- $A \times B =_{\text{def}} \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$ heißt (kartesisches) Produkt von A und B
- $A_1 \times \cdots \times A_n =_{\text{def}} \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$ heißt verallgemeinertes Produkt von A_1, \dots, A_n
- Elemente des Produktes von n Mengen heißen n -Tupel
- spezielle Bezeichnung für n -Tupel:
 - Paare für $n = 2$
 - Tripel für $n = 3$
 - Quadrupel für $n = 4$

Fakt: Für endliche Mengen A_1, \dots, A_n gilt

$$\|A_1 \times \cdots \times A_n\| = \|A_1\| \cdot \cdots \cdot \|A_n\|$$

- Jede Teilmenge $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ heißt **Relation**
- Relationen modellieren Beziehungen zwischen Objekten
- Relationen werden oft als Tabellen dargestellt

Für $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{1, 2\}$ und $A_3 = \{\%, \$\}$ könnte Relation gegeben sein als:

a	1	%
a	1	\$
b	2	\$

- **binäre Relationen**, d.h. zweistellige Relation, werden als Graphen dargestellt

- binäre Relationen über Grundmenge A können zum Ordnen von A verwendet werden
- $R \subseteq A \times A$ heißt **Halbordnung** (partielle Ordnung), falls für beliebige Elemente $a, b, c \in A$ gilt
 - **Reflexivität:** $(a, a) \in R$
 - **Transitivität:** wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann ist $(a, c) \in R$
 - **Antisymmetrie:** wenn $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$, dann ist $a = b$
- Halbordnung $R \subseteq A \times A$ heißt **Ordnung** (totale Ordnung, lineare Ordnung), falls zusätzlich gilt
 - **Totalität:** $(a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$
- für Halbordnung R schreiben wir Paare $(a, b) \in R$ auch als $a \leq_R b$
- für Halbordnung $R \subseteq A \times A$ heißt (A, \leq_R) **partiell geordnete Menge**
- für Ordnung $R \subseteq A \times A$ heißt (A, \leq_R) **total geordnete Menge**

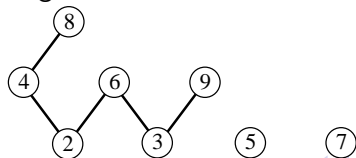
- (\mathbb{R}, \leq) und (\mathbb{N}, \leq) sind total geordnete Mengen
- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ ist für alle Mengen A eine partiell geordnete Menge
- Auf $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ betrachten wir die Relation

$$R =_{\text{def}} \{(x, y) \mid (x, y) \in A \text{ und } x \text{ teilt } y\}$$

Dann ist R eine Halbordnung mit folgender Extension:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9)\}$$

Darstellung als Hasse-Diagramm



Äquivalenzrelationen

- Relation $R \subseteq A \times A$ heißt **symmetrisch**, falls für alle $a, b \in A$ gilt: Ist $(a, b) \in R$, so ist auch $(b, a) \in R$
- **beachte**: antisymmetrisch ist nicht die Negation von symmetrisch
- Relation heißt **Äquivalenzrelation**, falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist

Erreichbarkeitsrelation auf ungerichteten Graphen ist Äquivalenzrelation:

- **Reflexivität**: jeder Knoten erreicht sich selbst über einen Weg der Länge 0
- **Transitivität**: gibt es Weg von Knoten u zu Knoten v und gibt es Weg von Knoten v zu Knoten w , so gibt es auch Weg von Knoten u zu Knoten w
- **Symmetrie**: gibt es Weg von u nach v , so gibt es Weg von v nach u durch Umkehrung der Kantentraversierung