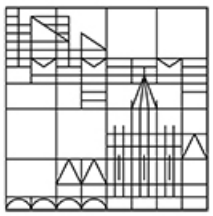
Fachbereich Informatik und
Informationswissenschaft

Universität
Konstanz



Skriptum

zur Vorlesung

Mathematik: Diskrete Strukturen

gehalten im Sommersemester 2016

von

Sven Kosub

14. Juli 2016

Version v5.18

Inhaltsverzeichnis

Kombinatorik 1

Der Schwerpunkt in diesem einführenden Kapitel über Kombinatorik liegt auf dem Abzählen endlicher Mengen.

1.1 Grundregeln des Abzählens

Lemma 1.1 *Es seien A und B endliche Mengen. Es gibt genau dann eine Bijektion $f : A \to B$, wenn $\|A\| = \|B\|$ gilt.*

Beweis: Siehe Satz 3.19 (aus dem Kapitel über Funktionen und Abbildungen im Skriptum *Mathematische Grundlagen der Informatik*). ■

Lemma 1.2 (Summenregel) *Es seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche, paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt:*

$$\|A_1 \cup \cdots \cup A_n\| = \sum_{j=1}^{n} \|A_j\|$$

Beweis: Wegen der paarweisen Disjunktheit der Mengen kommt jedes Element aus $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ in genau einer Menge A_j vor. ■

Lemma 1.3 (Produktregel) *Es seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt:*

$$\|A_1 \times \cdots \times A_n\| = \prod_{j=1}^{n} \|A_j\|$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über die Anzahl n der Mengen.

- *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich.
- *Induktionsschritt:* Es sei $n > 1$. Weiterhin seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Wir setzen

$$\begin{aligned} A^* &=_{\text{def}} A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \\ B_y &=_{\text{def}} \{\, (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A^* \,\} \qquad \text{für } y \in A_n \end{aligned}$$

Für die so definierten Mengen gelten folgende Eigenschaften:

(i) Die Mengenfamilie $\{ B_y \mid y \in A_n \}$ ist eine Partition von $A_1 \times \cdots \times A_n$.

(ii) Für jedes $y \in A_n$ ist die Funktion

$$f_y : B_y \to A^* : (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

eine Bijektion, d.h. $\|B_y\| = \|A^*\|$ für alle $y \in A_n$ (nach Lemma 1.1).

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\|A_1 \times \cdots \times A_n\| &= \left\| \bigcup_{y \in A_n} B_y \right\| && \text{(nach Eigenschaft (i))} \\
&= \sum_{y \in A_n} \|B_y\| && \text{(nach Lemma 1.2 und Eigenschaft (i))} \\
&= \sum_{y \in A_n} \|A^*\| && \text{(nach Lemma 1.1 und Eigenschaft (ii))} \\
&= \|A^*\| \cdot \|A_n\| \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n-1} \|A_j\| \right) \cdot \|A_n\| && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \|A_j\|
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Lemma 1.4 (Potenzregel) *Es seien A und B endliche Mengen mit $\|A\| = m$ und $\|B\| = n$. Dann existieren genau n^m Funktionen $f : A \to B$.*

Beweis: Nach Lemma 1.1 dürfen wir $A = \{1, \ldots, m\}$ ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen. Jeder Funktion $f : A \to B$ kann nun eineindeutig (injektiv) ein Tupel $(f(1), \ldots, f(m)) \in B^m$ zugeordnet werden. Außerdem entspricht jedes Tupel (die Wertetabelle) $(y_1, \ldots, y_m) \in B^m$ einer Funktion $f : A \to B : j \mapsto y_j$. Damit ist die Zuordnung sowohl injektiv als auch surjektiv, also eine Bijektion. Aus Lemma 1.1 und Produktregel (Lemma 1.3) folgt somit

$$\|\{ f \mid f : A \to B \}\| = \|B^m\| = \|B\|^m = n^m.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Beispiel: Wie viele boolesche Funktionen mit n Variablen gibt es? Die Antwort lautet $\|\{ f \mid f : \{0,1\}^n \to \{0,1\} \}\| = 2^{2^n}$.

Korollar 1.5 *Für endliche Mengen A mit $\|A\| = n$ gilt $\|\mathcal{P}(A)\| = 2^n$.*

Beweis: Wir konstruieren eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(A)$ und der Menge der Funktionen $f : A \to \{0,1\}$. Dazu definieren wir für eine Menge $B \in \mathcal{P}(A)$ die Funktion:

$$c_B : A \to \{0,1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{falls } x \notin B \end{cases}$$

Diese Zuordnung ist offensichtlich eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(A)$ und der Menge der Funktionen $f : A \to \{0,1\}$. Nach der Potenzregel (Lemma 1.4) und Lemma 1.1 gilt folglich

$$\|\mathcal{P}(A)\| = \|\{\ f \mid f : A \to \{0,1\}\ \}\| = 2^n.$$

Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Die im Beweis von Korollar 1.5 angegebenen Funktionen haben einen Namen: Für eine Menge $B \subseteq A$ heißt c_B die *charakteristische Funktion* von B.

1.2 Einfache Urnenmodelle

Urnenmodelle stellen ein typisches Szenario für kombinatorische Problemstellungen dar. Die einfachste Situation ist die folgende: In einer Urne liegen n unterscheidbare Kugeln, von den k Kugel gezogen werden dürfen. Die zu beantwortende Frage ist dann: Wie viele Möglichkeiten gibt es diese k Kugeln zu ziehen? Zur Präzisierung des Szenarios werden Unterschiede danach gemacht, ob

- die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, eine Rolle spielt,
- gezogene Kugeln wieder zurückgelegt werden oder nicht.

Damit ergeben sich vier verschiedene Szenarios.

Theorem 1.6 *Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Urne mit n Kugeln k Kugeln auszuwählen, ist durch folgende Tabelle gegeben:*

	mit Zurücklegen	*ohne Zurücklegen*
mit Reihenfolge	n^k	$n^{\underline{k}} =_{\text{def}} \dfrac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} =_{\text{def}} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Die im Theorem mitdefinierten Größen $n^{\underline{k}}$ und $\binom{n}{k}$ heißen *fallende Faktorielle von n der Länge k* sowie *Binomialkoeffizient* („n über k“).

Beispiel: Wir geben für jedes der vier Szenarien Beispiele an:

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Reihenfolge (geordnet)	PIN-Codes: • $n = 10$ Ziffern • $k = 4$ Stellen • 10.000 Codes	Wettkämpfe: • $n = 10$ Starter • $k = 3$ Medaillen • 720 Siegerehrungen
ohne Reihenfolge (ungeordnet)	Wahlen: • $n = 3$ Kandidaten • $k = 100$ Wähler • 5.151 Wahlausgänge	Lotto: • $n = 49$ Kugeln • $k = 6$ Kugeln • 13.983.816 Ziehungen

Beweis: Wir beweisen alle Fälle einzeln, aber aufeinander aufbauend:

- *Ziehen mit Zurücklegen, mit Reihenfolge:* Jede Auswahlmöglichkeit entspricht einer Funktion $f : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$, wobei $f(i)$ genau der Kugel entspricht, die als i-te Kugel gezogen wurde. Nach der Potenzregel (Lemma 1.4) gibt es somit n^k Möglichkeiten.

- *Ziehen ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge:* Für die erste gezogene Kugel gibt es n Möglichkeiten, für die zweite gezogene Kugel gibt es $n - 1$ Möglichkeiten. Für die k-te gezogene Kugel ($k \leq n$) gibt es mithin noch $n - k + 1$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es damit
$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}$$
Möglichkeiten.

- *Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge:* Mit Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Auswahlmöglichkeiten. Wenn die Reihenfolge keine Rolle mehr spielt, zählen alle Auswahlfolgen, bei denen die gleichen k Kugeln gezogen wurden, nur noch als eine Auswahlmöglichkeit. Dies sind gerade $k!$ viele. Damit gibt es insgesamt
$$\frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$
Möglichkeiten.

- *Ziehen mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge:* Da jede Kugel mehrmals gezogen werden kann, die Reihenfolge jedoch keine Rolle spielt, ist nur wichtig, wie oft eine Kugel gezogen wird. Es sei also $(a_1, \dots, a_n)$ ein Tupel mit den entsprechenden Anzahlen, wobei a_j gerade angibt, wie oft die Kugel j gezogen wird. Für ein Anzahltupel $(a_1, \dots, a_n)$ muss nun gelten:

  (i) $a_j \in \{0, \dots, k\}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

(ii) $a_1 + \cdots + a_n = k$

Wir müssen nun zählen, wie viele derartige Tupel es geben kann. Dazu repäsentieren wir die Tupel in einer anderen Weise, die es uns ermöglicht, das Szenario zu wechseln. Wir verwenden k-mal das Symbol $*$ und $(n-1)$-mal das Symbol $|$. Ein Anzahltupel $(a_1, \ldots, a_n)$ wird nun (injektiv) durch die Symbolfolge

$$\underbrace{*\,*\,\ldots\,*}_{a_1}|\underbrace{*\,*\,\ldots\,*}_{a_2}|\ldots|\underbrace{*\,*\,\ldots\,*}_{a_n}$$

repräsentiert. Umgekehrt entspricht auch jede Symbolfolge, die k-mal das Symbol $*$ und $(n-1)$-mal das Symbol $|$ enthält, einem Anzahltupel mit obigen Eigenschaften. Demzufolge ist die Repräsentierung eine Bijektion zwischen der Menge der Anzahltupel und der Menge der Symbolfolgen. Die Anzahl möglicher Symbolfolgen zu bestimmen, entspricht aber gerade dem Ziehen von k Positionen für das Symbol $*$ aus $n+k-1$ möglichen Positionen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge. Mithin gibt es insgesamt

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Möglichkeiten.

Damit ist das Theorem bewiesen. ∎

1.3 Binomialkoeffizienten

Aus dem letzten Abschnitt (Theorem 1.6) wissen wir, dass die Anzahl der Möglichkeiten aus n Kugeln k Kugeln ungeordnet ohne Zurücklegen zu ziehen gerade dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ entspricht. Da Binomialkoeffizienten auch über die reine Kombinatorik hinaus wichtig sind, wollen in diesem Abschnitt die wichtigsten Eigenschaften von Binomialkoeffizienten festhalten. Dazu definieren wir den Binomialkoeffzienten noch einmal explizit: Für $n, k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\binom{n}{k} =_{\text{def}} \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad \text{mit } \binom{n}{k} = 0 \qquad \text{für } k > n\ .$$

Ein einfache, sofort einsichtige Beobachtung ist:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Damit lässt sich der Binomialkoeffizient konsistent auch für negative Werte für k definieren:

$$\binom{n}{k} =_{\text{def}} 0 \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\ .$$

Theorem 1.7 (PASCALsches Dreieck) *Für $n \in \mathbb{N}_+$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Wir geben zwei Beweise für das Theorem an.

Beweis: (*rechnerisch*) Wir führen eine Fallunterscheidung bezüglich der Werte von k durch:

- Für $k = 0$ und $n > 1$ gilt $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n-1}{-1} + \binom{n-1}{0}$.
- Für $0 < k < n$ rechnen wir aus:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k}{k} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \cdot \frac{n-k}{n-k} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot n}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

- Für $k = n$ und $n > 1$ gilt $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}$.
- Für $k > n > 1$ gilt $\binom{n}{k} = 0 = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Damit ist das Theorem durch Nachrechnen bewiesen. ∎

Beweis: (*kombinatorisch*) Wir interpretieren die Gleichung als Bestimmung der Kardinalität von Mengen auf zwei verschiedene Weisen. Es seien $n \in \mathbb{N}_+$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren folgende Mengenfamilien:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &=_{\text{def}} \{\, \{a_1, \ldots, a_k\} \mid a_i \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j \,\} \\
\mathcal{F}_+ &=_{\text{def}} \{\, A \mid A \in \mathcal{F} \text{ und } 1 \in A \,\} \\
\mathcal{F}_- &=_{\text{def}} \{\, A \mid A \in \mathcal{F} \text{ und } 1 \notin A \,\}
\end{aligned}$$

Die einzelnen Mengenfamilien stehen für folgende Urnenmodelle:

- $\mathcal{F}$ entspricht dem ungeordneten Ziehen von k Kugeln aus n Kugeln ohne Zurücklegen.
- $\mathcal{F}_+$ entspricht dem ungeordneten Ziehen von k Kugeln aus n Kugeln ohne Zurücklegen, wobei Kugel 1 *immer* gezogen wird.
- $\mathcal{F}_-$ entspricht dem ungeordneten Ziehen von k Kugeln aus n Kugeln ohne Zurücklegen, wobei Kugel 1 *nie* gezogen wird.

Nun gilt offensichtlich $\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ \cup \mathcal{F}_-$ sowie $\mathcal{F}_+ \cap \mathcal{F}_- = \emptyset$, also $\|\mathcal{F}\| = \|\mathcal{F}_+\| + \|\mathcal{F}_-\|$ nach der Summenregel (Lemma 1.2). Nach Theorem 1.6 gilt:

$$\|\mathcal{F}\| = \binom{n}{k}, \qquad \|\mathcal{F}_+\| = \binom{n-1}{k-1}, \qquad \|\mathcal{F}_-\| = \binom{n-1}{k}$$

Mithin erhalten wir:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Damit ist das Theorem kombinatorisch bewiesen. ■

Beispiel: Der Dreiecksaufbau des rekursiven Zusammenhangs in Theorem 1.7 lässt sich leicht veranschaulichen und ist schon aus der Schule bekannt:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Theorem 1.8 (Binomialtheorem) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Das Binomialtheorem kann durch vollständige Induktion über n bewiesen werden. Dies ist eine gute Übung zu Anwendung des PASCALschen Dreiecks. Wir geben einen anderen Beweis.

Beweis: (*kombinatorisch*) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Durch Ausmultiplizieren von $(x+y)^n$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}(x+y)^n \quad = \quad & \overbrace{x \cdot \ \cdots \ \cdot x \cdot x}^{n \text{ Faktoren}} + \\ & + x \cdot \ \cdots \ \cdot x \cdot y + \\ & + x \cdot \ \cdots \ \cdot y \cdot x + \\ & + x \cdot \ \cdots \ \cdot y \cdot y + \\ & \vdots \\ & + \underbrace{y \cdot \ \cdots \ \cdot y \cdot y}_{n \text{ Faktoren}}\end{aligned}$$

Die Summanden können zusammengefasst werden zu Produkten von jeweils n Faktoren, von denen k Faktoren gerade y und $n-k$ Faktoren gerade x sind. Die Summanden sind also von der Form $x^{n-k}y^k$, da die Reihenfolge bei der Multiplikation keine Rolle spielt. Die Anzahl der Produkte $x^{n-k}y^k$ entspricht somit gerade dem Ziehen von k Kugeln (die Positionen für y im Produkt) aus n Kugeln (die Gesamtheit aller Positionen für Faktoren), d.h. $\binom{n}{k}$. Folglich gilt insgesamt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Korollar 1.9 *Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Beweis: Nach dem Binomialtheorem gilt

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Korollar 1.10 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Beweis: Nach dem Binomialtheorem gilt

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Theorem 1.11 (VANDERMONDEsche Identität) *Für $k, m, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

Beweis: (*kombinatorisch*) Es seien A und B disjunkte Mengen mit $\|A\| = n$ und $\|B\| = m$. Für jedes $j \in \{0, \ldots, k\}$ definieren wir die Mengenfamilie

$$\mathcal{X}_j =_{\text{def}} \{\ X \mid X \subseteq A \cup B, \|X \cap A\| = j \text{ und } \|X \cap B\| = k - j\ \}$$

Es gibt $\binom{n}{j}$ viele j-elementige Teilmengen von A und $\binom{m}{k-j}$ viele $(k-j)$-elementige Teilmengen von B. Damit gilt

$$\|\mathcal{X}_j\| = \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

Wegen $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ folgt nun

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \|\mathcal{X}_j\| = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}.$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Beispiel: Die Beweistechnik für Theorem 1.11 heißt *Doppeltes Abzählen*. Wenn zum Beispiel in einer Vorlesung $n + m$ Studenten sitzen, n weibliche und m männliche, wie viele verschiedene Gruppen mit genau k Studenten gibt es dann? Dies lässt sich auf zwei Arten bestimmen:

- Ohne Berücksichtigung des Geschlechts erhalten wir $\binom{n+m}{k}$ Gruppen.
- Mit Berücksichtigung des Geschlechts zählen wir für jedes $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ alle Gruppen mit jeweils genau j weiblichen und genau $k - j$ männlichen Studenten, damit also insgesamt $\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$ Gruppen.

Da wir über dieselbe Menge von Studenten argumentieren, sind beide Anzahlen gleich.

1.4 Permutationen

Es sei A eine endliche Menge mit $\|A\| = n$. Eine *Permutation* von A ist eine bijektive Funktion $\pi : A \to A$. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit setzen wir stets $A = \{1, \ldots, n\}$ voraus. Die Menge $\{1, \ldots, n\}$ notieren wir auch als $[n]$. Weiterhin definieren wir die Menge

$$\mathcal{S}_n =_{\text{def}} \{\ \pi \mid \pi : [n] \to [n] \text{ ist eine Permutation }\},$$

die sogenannte *symmetrische Gruppe* von n Elementen.

Theorem 1.12 *Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt $\|\mathcal{S}_n\| = n!$.*

Beweis: $\|\mathcal{S}_n\|$ entspricht dem Ziehen von n Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Nach Theorem 1.6 gilt

$$\|\mathcal{S}_n\| = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Ohne Beweis geben wir folgendes Resultat über das Verhalten der Fakultätsfunktion an:

Theorem 1.13 (Stirling**sche Formel)** *Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt*

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}},$$

wobei $e = e^1 = 2,718281828459\ldots$ die Eulersche Konstante *ist.*

Permutationen können auf verschiedene Arten geschrieben werden. Im Folgenden behandeln wir drei Schreibweisen:

Matrixschreibweise: Dazu schreiben wir die Permutation $\pi : [n] \to [n]$ als $2 \times n$-Matrix der Form

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Da π bijektiv ist, kommen alle Werte $1, \ldots, n$ in der zweiten Zeile vor.

Beispiel: Folgende Permutation ist in Matrixschreibweise gegeben:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Tupelschreibweise: Im Prinzip genügt es, von der Matrixschreibweise lediglich die zweite Zeile zu übernehmen, d.h. Permutationen können angegeben werden in der Form

$$\pi = (\pi(1), \pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(n)).$$

Beispiel: $\pi = (4, 1, 6, 2, 5, 3)$ ist obige Permutation in Tupelschreibweise.

Zyklenschreibweise: Die Zyklenschreibweise entsteht, wenn wir für $x \in [n]$ die iterierte Hintereinanderausführung von π auf x betrachten. Dadurch entsteht eine Folge:

$$\begin{aligned}
\pi^0(x) &=_{\text{def}} x,\\
\pi^1(x) &=_{\text{def}} \pi(x),\\
\pi^2(x) &=_{\text{def}} \pi(\pi(x)),\\
&\vdots\\
\pi^k(x) &=_{\text{def}} \pi(\pi^{k-1}(x)),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Für jedes $x \in [n]$ gibt es dann ein minimales $0 < k < n$ mit $\pi^k(x) = x$.

Beispiel: Für die Permutation $\pi = (4, 1, 6, 2, 5, 3)$ gilt

$$\begin{array}{llll}
\pi^0(1) = 1, & \pi^1(1) = 4, & \pi^2(1) = 2, & \pi^3(1) = 1;\\
\pi^0(2) = 2, & \pi^1(2) = 1, & \pi^2(2) = 4, & \pi^3(2) = 2;\\
\pi^0(3) = 3, & \pi^1(3) = 6, & \pi^2(3) = 3; & \\
\pi^0(4) = 4, & \pi^1(4) = 2, & \pi^2(4) = 1, & \pi^3(4) = 4;\\
\pi^0(5) = 5, & \pi^1(5) = 5; & & \\
\pi^0(6) = 6, & \pi^1(6) = 3, & \pi^2(6) = 6. &
\end{array}$$

Eine Folge $x, \pi(x), \pi^2(x), \ldots, \pi^{k-1}(x)$ mit minimalem $k > 0$, so dass $\pi^k(x) = x$, heißt *Zyklus* der Länge k und wird als $(x\ \pi(x)\ \pi^2(x)\ \ldots\ \pi^{k-1}(x))$ geschrieben.

Beispiel: $\pi = (4, 1, 6, 2, 5, 3)$ enthält die Zyklen (1 4 2), (3 6) und (5).

Jede Permutation kann als *Produkt von Zyklen* geschrieben werden, indem die Zyklen einfach hintereinander gesetzt werden. Die Schreibweise ist jedoch nicht eindeutig. Insbesondere kann jeder Zyklus der Länge k auf genau k Arten geschrieben werden.

Beispiel: Die Permutation $\pi = (4, 1, 6, 2, 5, 3)$ können wir als Produkt von Zyklen wie folgt schreiben:

$$(4, 1, 6, 2, 5, 3) \quad = \quad (1\ 4\ 2)(3\ 6)(5)$$

$$\begin{aligned} &= (4\ 2\ 1)(6\ 3)(5) \\ &= (5)(2\ 1\ 4)(6\ 3) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $(1\ 4\ 2) = (4\ 2\ 1) = (2\ 1\ 4)$.

Die Anzahl der Zyklen, aus der eine Permutation bestehen kann, liegt zwischen 1, wie in $(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$, und n, wie in $(1)(2)(3)\ldots(n)$. Im Folgende wollen wir die Anzahl der Permutationen mit genau k Zyklen genauer bestimmen.

Für $n, k \in \mathbb{N}$ sei $s_{n,k}$ (manchmal auch $\left[{n \atop k}\right]$ geschrieben) die Anzahl der Permutationen von n Elementen mit genau k Zyklen. Dann gilt also

$$\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!.$$

Die Zahlen $s_{n,k}$ heißen STIRLING-*Zahlen erster Art.* Folgende Sonderfälle sind zu beachten:

- Für $k > n$ gilt $s_{n,k} = 0$, da eine Permutation von n Elementen höchstens n Zyklen enthalten kann.
- Für $n > 0$ gilt $s_{n,0} = 0$, da jede Permutation mindestens einen Zyklus enthält.
- Wir definieren $s_{0,0} =_{\text{def}} 1$.

Mit diesen Sonderfällen können wir wiederum eine Rekursionsvorschrift für die Berechnung der STIRLING-Zahlen erster Art angeben.

Theorem 1.14 (STIRLING-Dreieck erster Art) *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt*

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}.$$

Beweis: (*kombinatorisch*) Es sei $\pi \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation mit k Zyklen. Dann kann π auf zwei Arten aus einer Permutation aus $\mathcal{S}_{n-1}$ entstanden sein:

(i) Einfügen eines Zyklus (n) in Permutationen aus $\mathcal{S}_{n-1}$ mit $k-1$ Zyklen

(ii) Einfügen des Elementes n in einen der Zyklen einer Permutation aus $\mathcal{S}_{n-1}$ mit k Zyklen

Beide Fälle sind disjunkt. Für die Anzahl der Möglichkeiten, Permutationen mit k Zyklen auf diese zwei Arten zu erzeugen, ergibt sich jeweils:

(i) $s_{n-1,k-1}$

(ii) $(n-1) \cdot s_{n-1,k}$ (denn für das Einfügen eines Elementes in einen Zyklus der Länge t gibt es t Möglichkeiten–Einfügen als erstes und Einfügen als letztes Element erzeugen den gleichen Zyklus)

Insgesamt gilt also $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$. Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Beispiel: Um die Konstruktion aus dem Beweis von Theorem 1.14 zu verdeutlichen, betrachten wir die 6 Permutationen von 4 Elementen mit 3 Zyklen:

(1)(2 3)(**4**)	(1 **4**)(2)(3)
(1 2)(3)(**4**)	(1)(2 **4**)(3)
(1 3)(2)(**4**)	(1)(2)(3 **4**)

Die linken Permutationen entstehen aus den Permutationen (1)(2 3), (1 2)(3) und (1 3)(2) durch Einfügen des Einerzyklus (4). Die rechten Permutationen entstehen aus der Permutation (1)(2)(3) durch Einfügen von 4 in jeden Einerzyklus.

Um einen Eindruck von Wachstum der STIRLING-Zahlen erster Art zu erhalten, können die Werte analog dem PASCALschen Dreieck angeordnet werden.

Beispiel: Der Dreiecksaufbau des rekursiven Zusammenhangs in Theorem 1.14 lässt sich wie folgt veranschaulichen:

			1			
		0		1		
	0		1		1	
0		2		3		1
0	6		11		6	1
0	24	50		35	10	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Mit Permutationen, insbesondere mit der symmetrischen Gruppe, werden wir uns im Kapitel über algebraische Strukturen noch einmal ausführlich beschäftigen.

1.5 Mengenpartitionen

In diesem Abschnitt wollen wir bestimmen, wie viele Möglichkeiten es gibt n-elementige Grundmengen in k nichtleere, disjunkte Komponenten zu zerlegen.

Es sei A eine endliche Menge mit $\|A\| = n$. Eine *k-Partition* $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ ist eine k-elementige Familie von nichtleeren Teilmengen von A mit $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k = A$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$, falls $i \neq j$.

Es sei $S_{n,k}$ (manchmal auch: $\left\{ {n \atop k} \right\}$) die Anzahl der k-Partitionen einer n-elementigen Grundmenge. Die Zahlen $S_{n,k}$ heißen *Stirling-Zahlen zweiter Art*. Folgende Spezialfälle sind zu beachten:

- Für $k > n$ gilt $S_{n,k} = 0$, da die n Elemente höchstens in n Komponenten liegen können.
- Für $k = 0$ gilt $S_{n,0} = 0$, da die n Elemente in wenigstens einer Komponenten liegen müssen.
- Wir definieren $S_{0,0} =_{\text{def}} 1$.

Wir können nun eine ähnliche rekursive Darstellung wie in Theorem 1.14 für die Stirling-zahlen erster Art auch für die Stirling-Zahlen zweiter Art beweisen.

Theorem 1.15 (Stirling-Dreieck zweiter Art) *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt*

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}.$$

Beweis: (*kombinatorisch*) Es sei $\mathcal{F}$ eine k-Partition einer n-elementigen Menge. Dann kann $\mathcal{F}$ auf zwei Arten aus einer Partition einer $(n-1)$-elementigen Menge entstehen:

(i) Hinzufügen der Menge $\{n\}$ zu einer $(k-1)$-Partition von $n-1$ Elementen

(ii) Einfügen von n in einer der Mengen einer k-Partition von $n-1$ Elementen

Die Anzahl der Möglichkeiten k-Partitionen von n Elementen zu bilden, ist wie folgt:

(i) $S_{n-1,k-1}$

(ii) $k \cdot S_{n-1,k}$

Mithin gilt also $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$. Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Wir geben wieder einen Eindruck für das Wachstum der Zahlen $S_{n,k}$ gemäß Theorem 1.15.

Beispiel: Der Dreiecksaufbau des rekursiven Zusammenhangs in Theorem 1.15 lässt sich wie folgt veranschaulichen:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & \\
0 & & 1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Interessieren wir uns nur für die Anzahl aller möglichen Partitionen einer Grundmenge A mit $\|A\| = n$, so kann man die *Bell-Zahlen* bestimmen:

$$B_n =_{\text{def}} \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$$

Insbesondere gibt B_n also die Anzahl aller Äquivalenzrelationen auf n Elementen an.

1.6 Zahlpartitionen

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, wie viele Möglichkeiten es gibt, einen Zahl als Summe anderer Zahlen darzustellen.

Eine *Zahlpartition* von $n \in \mathbb{N}$ mit k Summanden besteht aus ganzen Zahlen $n_1, \ldots, n_k > 0$ mit $n = n_1 + \cdots + n_k$. Spielt die Reihenfolge der Summanden keine Rolle, dann heißt die Zahlpartition *ungeordnet*, sonst *geordnet*.

Beispiel: $7 = 1 + 1 + 2 + 3$ ergibt eine Zahlpartition von 7 mit 4 Summanden. Ungeordnet repräsentieren $1, 1, 2, 3$ und $3, 2, 1, 1$ die gleiche, georndet unterschiedliche Zahlpartitionen.

Die Frage ist also: Wie viele Zahlpartitionen von n mit k Summanden gibt es?

Ungeordnete Zahlpartitionen: Es sei $P_{n,k}$ die Anzahl der Möglichkeiten die Zahl n ungeordnet in k Summanden zu zerlegen. Klarerweise gilt $P_{n,n} = 1$ sowie $P_{n,1} = 1$ für $n \geq 1$. Außerdem sind folgende Spezialfälle zu beachten:

- Für $k > n$ gilt $P_{n,k} = 0$.
- Für $n \geq 1$ gilt $P_{n,0} = 0$.
- Wir definieren $P_{0,0} =_{\text{def}} 1$.

Folgendes Theorem gibt eine rekursive Vorschrift zur Berechnung von $P_{n,k}$ an.

Theorem 1.16 *Für $n, k \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq k$ gilt*

$$P_{n+k,k} = \sum_{j=1}^{k} P_{n,j}.$$

Beweis: (*kombinatorisch*) Wir unterscheiden die Summanden bei der Zerlegung von $n+k$ in k Summanden nach Einsen und größeren Summanden. Für eine Partition mit genau i Einsen gilt

$$n + k = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{i} + \underbrace{n_{i+1} + n_{i+2} + \cdots + n_k}_{k-i}$$

mit $n_{i+1}, \ldots, n_k \geq 2$. Wir definieren $n'_j =_{\text{def}} n_j - 1$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} n'_{i+1} + n'_{i+2} + \cdots + n'_k &= n_{i+1} + n_{i+2} + \cdots + n_k - (k - i) \\ &= n + (k - i) - (k - i) \\ &= n \end{aligned}$$

Mithin ist $n'_{i+1}, \ldots, n'_k$ eine Zahlpartition von n mit $k - i$ Summanden. Umgekehrt kann jede Zahlpartition von n mit $k - i$ Summanden in eine Zahlpartition von $n + k$ mit k Summanden, von denen genau i den Wert 1 haben, umgewandelt werden. Insgesamt gilt also

$$P_{n+k,k} = \sum_{i=0}^{k-1} P_{n,k-i} = \sum_{j=1}^{k} P_{n,j}.$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Beispiel: Es gilt $P_{5,3} = 2$. Einserseits sind die Zahlpartitionen $1 + 1 + 3 = 5$ sowie $1+2+2 = 5$. Andererseits ergibt sich mit der Formel aus obigem Theorem

$$P_{5,3} = \sum_{j=1}^{3} P_{2,j} = P_{2,1} + P_{2,2} + P_{2,3} = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Geordnete Zahlpartitionen: Die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl n geordnet in k Summanden zu verteilen, kann auf bereits bekannte Größen zurückgeführt werden.

Theorem 1.17 *Für alle $n, k \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq k$ gibt es*

$$\binom{n-1}{k-1}$$

geordnete Zahlpartitionen von n mit k Summanden.

Beweis: Jede Zahl $n \geq 2$ kann mit n Einsen dargestellt werden:

$$n = \overbrace{\underbrace{1+\cdots+1}_{x_1}+\underbrace{1+\cdots+1}_{x_2}+\cdots+\underbrace{1+\ldots+1}_{x_k}}^{n}$$

Somit kann jede geordnete Zahlpartition von n mit k Summanden umkehrbar eindeutig durch die Positionen der Pluszeichen zwischen Einserblöcken repräsentiert werden. Folglich werden aus $n-1$ möglichen Positionen genau $k-1$ ausgewählt. Insgesamt ergeben sich

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Möglichkeiten. Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Beispiel: Wie viele Lösungen besitzt die lineare Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

in den natürlichen Zahlen? Die Null ist hier also als Summand zugelassen. Wegen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \iff (x_1+1) + (x_2+1) + \cdots + (x_k+1) = n + k$$

gibt es genau $\binom{n+k-1}{k-1}$ Lösungen.

1.7 Mehrfache Urnenmodelle*

Im Folgenden betrachten wir ein verallgemeinertes kombinatorisches Szenario, in dem viele der bisher angestellten Überlegungen zur Anwendung kommen: Wie viele Möglichkeiten gibt es, n Bälle auf m Urnen zu verteilen?

Hierbei sind wieder verschiedene Szenarien möglich, je nachdem

- ob die Bälle unterscheidbar oder nicht unterscheidbar sind,

- ob die Urnen unterscheidbar oder nicht unterscheidbar sind und
- ob die Urnen jeweils mindestens, genau oder höchstens einen Ball enthalten müssen.

Theorem 1.18 fasst für alle möglichen Szenarien die Anzahlen zusammen.

Theorem 1.18 *Die Anzahl der Möglichkeiten, n Bälle auf m Urnen zu verteilen, ist durch folgende Tabelle angegeben:*

$\|B\| = n$, $\|U\| = m$	*Zuordnung beliebig*	*Zuordnung injektiv*	*Zuordnung surjektiv*	*Zuordnung bijektiv*
B untersch., U untersch.	m^n	$\begin{cases} m^{\underline{n}} & m \geq n \\ 0 & m < n \end{cases}$	$m! \cdot S_{n,m}$	$\begin{cases} n! & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$
B nicht untersch., U untersch.	$\binom{m+n-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$	$\begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$
B untersch., U nicht untersch.	$\sum_{k=1}^{m} S_{n,k}$	$\begin{cases} 1 & m \geq n \\ 0 & m < n \end{cases}$	$S_{n,m}$	$\begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$
B nicht untersch., U nicht untersch.	$\sum_{k=1}^{m} P_{n,k}$	$\begin{cases} 1 & m \geq n \\ 0 & m < n \end{cases}$	$P_{n,m}$	$\begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$

Beweis: Der Beweis des Theorems bleibt als Übungsaufgabe überlassen. ■

1.8 Weitere Abzählprinzipien

Im letzten Abschnitt diese Kapitels über Kombinatorik diskutieren wir noch zwei weitere Abzählprinzipien.

Inklusion-Exklusion. Zunächst wollen wir eine Verallgemeinerung der Summenregel (siehe Lemma 1.2) auf beliebige, nicht notwendig paarweise disjunkte Mengen angeben.

Theorem 1.19 (Inklusions-Exkusions-Prinzip) *Es seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt:*

$$\left\| \bigcup_{j=1}^{n} A_j \right\| = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{1+\|K\|} \left\| \bigcap_{k \in K} A_k \right\|$$

Beispiel:

- Für $n = 2$ reduzieren sich die Ausdrücke in Theorem 1.19 zu folgender Identität:

$$\|A_1 \cup A_2\| \;=\; \|A_1\| + \|A_2\| - \|A_1 \cap A_2\|$$

- Für $n = 3$ reduzieren sich die Ausdrücke in Theorem 1.19 zu folgender Identität:

$$\begin{aligned}\|A_1 \cup A_2 \cup A_3\| &= \|A_1\| + \|A_2\| + \|A_3\| \\ &\quad - \|A_1 \cap A_2\| - \|A_1 \cap A_3\| - \|A_2 \cap A_3\| \\ &\quad + \|A_1 \cap A_2 \cap A_3\|\end{aligned}$$

Beweis: Wir bestimmen, wie oft jedes Element auf beiden Seiten der Gleichung gezählt wird. Es sei $x \in \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

- *Linke Seite:* Das Element x wird genau einmal gezählt.
- *Rechte Seite:* Wir müssen zeigen, dass x auch hier genau einmal gezählt wird. Dazu sei $\ell =_{\text{def}} \|\{\, j \mid x \in A_j \,\}\|$. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit komme x genau in den Mengen $A_1, \ldots, A_\ell$ vor. Dann gilt:
  - Für $\emptyset \neq K \subseteq \{1, \ldots, \ell\}$ wird x genau $(-1)^{1+\|K\|}$-mal gezählt.
  - Für alle anderen Menge K wird x gar nicht gezählt.

  Somit folgt für den Beitrag von x zur rechten Seite der Gleichung insgesamt:

$$\begin{aligned}\sum_{\emptyset \neq K \subseteq \{1,\ldots,\ell\}} (-1)^{1+\|K\|} &= \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^{1+k} = -\sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \\ &= 1 \qquad \text{(nach Korollar 1.10)}\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ∎

Wir wollen an einem Beispiel verdeutlichen, wie der doch recht kompliziert wirkende Ausdruck auf der rechten Seite gewinnbringend angewendet werden kann.

Beispiel: Wie viele Primzahlen gibt es zwischen 2 und 100? Um diese Frage zu beantworten, bestimmen wir die zusammengesetzten Zahlen zwischen 2 und 100 mit Hilfe des Inklusions-Exklusions-Prinzip. Es sei $A =_{\text{def}} \{2, \ldots, 100\}$. Eine Zahl $x \in A$ ist zusammengesetzt, falls $x = p \cdot n$ für geeignete Zahlen $p, n \in A$ gilt, wobei p eine Primzahl mit $p \leq \sqrt{100} = 10$ ist. Damit kommen als Primzahlen nur $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ und $p_4 = 7$ in Frage. Für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ betrachten wir die Menge der Vielfachen von p_i, d.h. die Menge

$$A_i =_{\text{def}} \{\, x \in A \mid (\exists n \in A)[x = p_i \cdot n] \,\}.$$

Damit gilt:

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ ist die Menge der zusammengesetzten Zahlen aus A

- Die Kardinalitäten der möglichen Schnittmengen sind

$$\begin{aligned} \|A_i\| &= \left\lfloor \frac{100}{p_i} \right\rfloor - 1 \quad (\text{da } p_i \notin A_i) \\ \left\| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right\| &= \left\lfloor \frac{100}{\prod_{j=1}^{k} p_{i_j}} \right\rfloor \quad \text{für } k \in \{2,3,4\} \text{ und } 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 4 \end{aligned}$$

Nach Theorem 1.19 erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\| \\ &= \left(\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor - 1 \right) \\ &\quad - \left(\left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{14} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{35} \right\rfloor \right) \\ &\quad + \left(\left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{70} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{105} \right\rfloor \right) \\ &\quad - \left\lfloor \frac{100}{210} \right\rfloor \\ &= 49 + 32 + 19 + 13 - 16 - 10 - 7 - 6 - 4 - 2 + 3 + 2 + 1 + 0 - 0 \\ &= 74 \end{aligned}$$

Damit gibt es $99 - 74 = 25$ Primzahlen zwischen 2 und 100.

Schubfachschluss. Ein weiteres wichtiges Abzählprinzip, um die Existenz von Objekten zu beweisen, ist der Schubfachschluss (engl. *pigeonhole principle*).

Theorem 1.20 (Schubfachschluss) *Es seien A und B endliche Mengen mit $\|A\| > \|B\| > 0$ und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann gibt es ein $y \in B$ mit $\|f^{-1}(y)\| > 1$.*

Beweis: (*Widerspruch*) Angenommen es gilt $\|f^{-1}(y)\| \leq 1$ für alle $y \in B$. Dann wissen wir aus dem letzten Semester, dass f eine injektive Funktion ist. Daraus folgt $\|A\| \leq \|B\|$. Dies ist ein Widerspruch zu $\|A\| > \|B\|$. Mithin war die Annahme falsch, und das Theorem ist beweisen. ■

Mit anderen Worten: Um $\|A\|$ Objekte in $\|B\|$ Schubfächer zu stecken, müssen sich in mindestens einem Schubfach 2 Objekte befinden (falls $\|A\| > \|B\|$ ist).

Beispiele: An folgenden Fällen wollen wir die Anwendung des Schubfachschlusses demonstrieren:

- Von 13 Personen feiern mindestens zwei Personen im gleichen Monat ihren Geburtstag.
- In jeder Menge P von mindestens zwei Personen gibt es immer mindestens zwei Personen, die die gleiche Anzahl von Personen in P kennen. (Hierbei sei angenommen, dass „kennen“ eine symmetrische Relation ist.)

  Zur Begründung: Es seien $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ die Personenmenge mit $n \geq 2$ Personen sowie $f : P \to \{0, \ldots, n-1\}$ eine Funktion, die der Person p_i die Anzahl ihrer Bekannten in P zuordnet. Wegen $\|P\| = \|\{0, \ldots, n-1\}\| = n$ kann Theorem 1.20 nicht direkt angewendet werden. Eine genauere Analyse ermöglicht jedoch die folgende Fallunterscheidung:
  - Es gibt ein $p \in P$ mit $f(p) = 0$. Wegen der Symmetrie der Bekanntschaftsrelation gibt es auch keine Person, die alle Personen in P kennt. Also gilt $f(q) \neq n-1$ für alle $q \in P$ und folglich $f(P) \subseteq \{0, \ldots, n-2\}$.
  - Für alle $p \in P$ gilt $f(p) \neq 0$. Damit gilt $f(P) \subseteq \{1, \ldots, n-1\}$.

  In beiden Fällen gilt also $\|f(P)\| < \|P\|$. Nach Theorem 1.20 folgt die Aussage.

Theorem 1.21 (Verallgemeinerter Schubfachschluss) *Es seien A und B endliche, nichtleere Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann existiert ein $y \in B$ mit $\|f^{-1}(y)\| \geq \left\lceil \frac{\|A\|}{\|B\|} \right\rceil$.*

Beweis: (*Widerspruch*) Wir nehmen wiederum an, dass $\|f^{-1}(y)\| \leq \left\lceil \frac{\|A\|}{\|B\|} \right\rceil - 1$ für alle $y \in B$ gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sum_{y \in B} \|f^{-1}(y)\| \\
&\leq \|B\| \cdot \left(\left\lceil \frac{\|A\|}{\|B\|} \right\rceil - 1 \right) \\
&\leq \|B\| \cdot \left(\frac{\|A\| + \|B\| - 1}{\|B\|} - 1 \right) \\
&= \|B\| \cdot \frac{\|A\| - 1}{\|B\|} \\
&= \|A\| - 1
\end{aligned}$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Mithin war die Annahme falsch, und das Theorem ist bewiesen. ■

Beispiel: Wir wollen wieder anzwei Beispielen den verallgemeinerten Schubfachschluss verdeutlichen.

- Von 100 Personen feiern mindestens 9 Personen im gleichen Monat ihren Geburtstag.
- In jeder Menge von 6 Personen gibt es 3 Personen, die sich alle untereinander kennen, oder 3, die sich alle nicht kennen. (Hierbei nehmen wir wiederum an, dass „kennen“ eine symmetrische Relation ist.)

  Zur Begründung: Es sei $P = \{p_1, \ldots, p_6\}$ eine beliebige Personenmenge. Wir betrachten für die Person p_1 die Funktion

  $$f : \{p_2, \ldots, p_5\} \to \{\text{„bekannt“}, \text{„nicht bekannt“}\},$$

  die jeder Person $p_2, \ldots, p_5$ zuordnet, ob p_1 diese Person kennt. Nach Theorem 1.21 sind $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$ Personen mit p_1 „bekannt“ oder 3 Personen mit p_1 „nicht bekannt“. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit seien 3 Personen mit p_1 bekannt (sonst vertauschen wir in nachfolgender Argumentation einfach „kennen“ und „nicht kennen“) und zwar p_2, p_3 und p_4. Nun gibt es zwei Möglichkeiten für die Personen p_2, p_3 und p_4:
  - Es gibt zwei Personen in $\{p_2, p_3, p_4\}$, die sich kennen. Diese beiden Personen kennen aber auch p_1. Somit gibt es also 3 Personen, die sich alle untereinander kennen.
  - Die Personen p_2, p_3 und p_4 kennen sich nicht. Also gibt es 3 Personen, die sich untereinander nicht kennen.

Rekursionen 2

2.1 Analyse von Algorithmen

Rekursionsgleichungen treten häufig bei Laufzeitanalysen von Algorithmen auf. Exemplarisch werden wir dies am wohlbekannten euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen diskutieren. Zur Erinnerung geben wir den Algorithmus noch einmal an (für Korrektheit und Herleitung siehe Skriptum „Brückenkurs Mathematik“):

Algorithmus:	EUKLID
Eingabe:	positive natürliche Zahlen n, m mit $m \leq n$
Ausgabe:	$\mathrm{ggT}(m, n)$

1. IF m teilt n
2. RETURN m
3. ELSE
4. RETURN EUKLID$(\mathrm{mod}(n, m), m)$

Die Laufzeit des Algorithmus wird sicher maßgeblich von der Anzahl der rekursiven Aufrufe bestimmt. Es ist also die Frage zu beantworten, wie viele rekursive Aufrufe von EUKLID(m,n) benötigt werden. Wir nehmen im Folgenden stets an, dass $m \leq n$ gilt.

Beispiel: Eine triviale obere Schranke für die Anzahl der Aufrufe ist sicher n. Dabei sind wir aber viel zu pessimistisch. Beispielsweise gilt

$$\text{EUKLID}(36, 120) = \text{EUKLID}(12, 36) = 12,$$

womit also nur eine rekursiver Aufrufe erfolgt. Für EUKLID$(89, 144)$ werden genau 9 rekursive Aufrufe benötigt. Und dies ist die maximale Anzahl rekursive Aufrufe von EUKLID$(m, 144)$ für alle $1 \leq m \leq 144$.

Die maximale Anzahl der rekursiven Aufrufe ist eng mit den FIBONACCI-Zahlen verbunden. Die n-te FIBONACCI-Zahl F_n ist wiederum rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} F_n &=_{\text{def}} F_{n-1} + F_{n-2} && \text{für } n \geq 2 \\ F_1 &=_{\text{def}} 1 \\ F_0 &=_{\text{def}} 0 \end{aligned}$$

Die Folge der FIBONACCI-Zahlen beginnt mit $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$. Die in obigem Beispiel verwendeten Zahlen 89 und 144 sind also gerade F_{11} und F_{12}. Benachbarte FIBONACCI-Zahlen sind nun gerade schlechteste Eingaben für den euklidischen Algorithmus.

Lemma 2.1 *Es seien $k, m, n \in \mathbb{N}_+$ beliebige natürliche Zahlen. Dann gilt:*

1. $\textsc{Euklid}(F_{k+2}, F_{k+3})$ *benötigt genau k rekursive Aufrufe.*
2. *Wenn* $\textsc{Euklid}(m, n)$ *mindestens k rekursive Aufrufe benötigt, dann gilt $n \geq F_{k+3}$ und $m \geq F_{k+2}$*

Beweis: (*Induktion*) Wir zeigen beide Aussagen im Block mittels vollständiger Induktion über k.

- *Induktionsanfang*: Es sei $k = 1$. Es gilt $F_3 = 2$ und $F_4 = 3$.
  1. Wegen $\textsc{Euklid}(2, 3) = \textsc{Euklid}(1, 2) = 1$ erfolgt genau ein rekursiver Aufruf.
  2. Wir betrachten alle Fälle mit $n < 3$ oder $m < 2$. Wegen $\textsc{Euklid}(2, 2) = 2$ und $\textsc{Euklid}(1, n) = 1$ erfolgt in allen diesen Fällen kein rekursiver Aufruf. Damit ist die Kontraposition der Aussage für $k = 1$ gezeigt und die Aussage ist wahr.
- *Induktionsschritt*: Es sei $k > 1$. Damit gilt

$$1 \leq F_{k+1} < F_{k+2} < F_{k+3} = F_{k+2} + F_{k+1} < 2 \cdot F_{k+2}$$

  und folglich $F_{k+2} \nmid F_{k+3}$ mit $\mathrm{mod}(F_{k+3}, F_{k+2}) = F_{k+1}$.
  1. Es gilt $\textsc{Euklid}(F_{k+2}, F_{k+3}) = \textsc{Euklid}(F_{k+1}, F_{k+2})$. Nach Induktionsvoraussetzung benötigt $\textsc{Euklid}(F_{(k-1)+2}, F_{(k-1)+3})$ genau $k-1$ rekursive Aufrufe. Mithin benötigt $\textsc{Euklid}(F_{k+2}, F_{k+3})$ genau k rekursive Aufrufe.
  2. Für m und n benötige $\textsc{Euklid}(m, n)$ mindestens $k \geq 2$ rekursive Aufrufe. Dann gilt $\textsc{Euklid}(m, n) = \textsc{Euklid}(\mathrm{mod}(n, m), m)$ und $\textsc{Euklid}(\mathrm{mod}(n, m), m)$ benötigt mindestens $k-1 \geq 1$ rekursive Aufrufe. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $m \geq F_{(k-1)+3}$ sowie $\mathrm{mod}(n, m) \geq F_{(k-1)+2}$. Mithin gilt:

$$n \geq m + \mathrm{mod}(n, m) \geq F_{k+2} + F_{k+1} = F_{k+3}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Korollar 2.2 *Es seien $m, n \in \mathbb{N}_+$ beliebige natürliche Zahlen mit $m \leq n$. Dann ist die Anzahl der rekursiven Aufrufe von* $\textsc{Euklid}(m, n)$ *nach oben beschränkt (mit Gleichheit) durch*

$$k^* =_{\mathrm{def}} \max \{\ k \mid F_{k+3} \leq n\ \}.$$

Mit dem Wissen um die Formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \tag{2.1}$$

folgt $k^* = O(\log n)$ und damit eine asymptotisch präzise Aussage über das Laufzeitverhalten von Euklid. Der Algorithmus terminiert also für alle Eingaben mit höchstens logarithmisch vielen rekursiven Aufrufen im Wert der größeren Zahl und ist damit schnell.

Im Folgenden wollen Gleichheiten wie die Formel (2.1) beweisen und auch herleiten.

2.2 Lineare Rekursionsgleichungen

Definition 2.3 *Eine* Rekursionsgleichung *der Form*

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} + b_k \qquad \textit{für alle } n \geq k$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_i = b_i \qquad \textit{für alle } i \in \{0, \ldots, k-1\}$$

heißt lineare Rekursionsgleichung k-ter Ordnung. *Für $b_k = 0$ heißt die Rekursionsgleichung* homogen *sonst* inhomogen.

Beispiel: Die einfachsten, nicht trivialen Rekursionsgleichungen sind homogene, lineare Rekursionsgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} x_n &= a \cdot x_{n-1} && \text{für } n \geq 1 \\ x_0 &= b_0 \end{aligned}$$

Die Lösung der Gleichung ist sofort einzusehen: $x_n = b_0 \cdot a^n$.

Theorem 2.4 *Es sei eine inhomogene, lineare Rekursionsgleichung erster Ordnung*

$$\begin{aligned} x_n &= a \cdot x_{n-1} + b_1 && \textit{für } n \geq 1 \\ x_0 &= b_0 \end{aligned}$$

mit beliebigen Konstanten a, b_0, b_1 gegeben. Dann hat die Lösung der Gleichung die Form:

$$x_n = \begin{cases} b_0 \cdot a^n + b_1 \cdot \dfrac{a^n - 1}{a - 1}, & \textit{falls } a \neq 1 \\ b_0 + n \cdot b_1 & \textit{falls } a = 1 \end{cases}$$

Beweis: (*Induktion*) Wir zeigen das Theorem mittels vollständiger Induktion über n.

- *Induktionsanfang*: Es sei $n = 0$. Dann gilt für $a \neq 1$

$$x_0 = b_0 \cdot a^0 + b_1 \cdot \frac{a^0 - 1}{a - 1} = b_0$$

und für $a = 1$

$$x_0 = b_0 + 0 \cdot b_1 = b_0.$$

- *Induktionsschritt*: Es sei $n > 1$. Für $a \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned} x_n &= a \cdot x_{n-1} + b_1 && \text{(nach Definition)} \\ &= a \cdot \left(b_0 \cdot a^{n-1} + b_1 \cdot \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} \right) + b_1 && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= b_0 \cdot a^n + b_1 \left(\frac{a^n - a}{a - 1} + 1 \right) \\ &= b_0 \cdot a^n + b_1 \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

Für $a = 1$ ergibt sich aus der rekursiven Definition und der Induktionsvoraussetzung

$$x_n = x_{n-1} + b_1 = b_0 + (n-1) \cdot b_1 + b_1 = b_0 + n \cdot b_1.$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Theorem 2.5 *Es sei eine homogene, lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung*

$$\begin{aligned} x_n &= a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} && \text{für } n \geq 2 \\ x_1 &= b_1 \\ x_0 &= b_0 \end{aligned}$$

mit $a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$ gegeben. Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Lösungen von $t^2 - a_1 t - a_2 = 0$ und $A, B \in \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$A =_{\text{def}} \begin{cases} \dfrac{b_1 - b_0\beta}{\alpha - \beta}, & \text{falls } \alpha \neq \beta \\ \dfrac{b_1 - b_0\alpha}{\alpha}, & \text{falls } \alpha = \beta \end{cases}$$

$$B =_{\text{def}} \begin{cases} \dfrac{b_1 - b_0\alpha}{\alpha - \beta}, & \text{falls } \alpha \neq \beta \\ b_0, & \text{falls } \alpha = \beta \end{cases}$$

Dann hat die Lösung der Gleichung die Form:

$$x_n = \begin{cases} A\alpha^n - B\beta^n, & \text{falls } \alpha \neq \beta \\ (An + B)\alpha^n, & \text{falls } \alpha = \beta \end{cases}$$

Beweis: (*Induktion*) Wir zeigen das Theorem nur für den Fall $\alpha \neq \beta$ und verwenden dazu wiederum vollständige Induktion über n.

- *Induktionsanfang*: Es sei $n \in \{0, 1\}$. Für $n = 0$ gilt

$$x_0 = A\alpha^0 - B\beta^0 = A - B = \frac{b_1 - b_0\beta - b_1 + b_0\alpha}{\alpha - \beta} = b_0 \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = b_0$$

  und für $n = 1$ gilt

$$x_1 = A\alpha^1 - B\beta^1 = A\alpha - B\beta = \frac{b_1\alpha - b_0\alpha\beta - b_1\beta + b_0\alpha\beta}{\alpha - \beta} = b_1 \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = b_1.$$

- *Induktionsschritt*: Es sei $n > 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
x_n &= a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} && \text{(nach Definition)} \\
&= a_1 \cdot \left(A\alpha^{n-1} - B\beta^{n-1}\right) + a_2 \cdot \left(A\alpha^{n-2} - B\beta^{n-2}\right) \\
& && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= a_1 A\alpha^{n-1} + a_2 A\alpha^{n-2} - a_1 B\beta^{n-1} - a_2 B\beta^{n-2} \\
&= A\alpha^{n-2} \cdot (a_1\alpha + a_2) - B\beta^{n-2} \cdot (a_1\beta + a_2) \\
&= A\alpha^{n-2} \cdot \alpha^2 - B\beta^{n-2} \cdot \beta^2 \\
& && \text{(wegen } \alpha^2 - a_1\alpha - a_2 = 0 \text{ und } \beta^2 - a_1\beta - a_2 = 0) \\
&= A\alpha^n - B\beta^n
\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Die Folge der FIBONACCI-Zahlen ist durch eine homogene, lineare Rekursionsgleichung zweiter Ordnung gegeben. Somit kann das Theorem 2.5 angewendet werden.

Korollar 2.6 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Beweis: Nach Definition der FIBONACCI-Zahlen ist $a_1 = a_2 = 1$. Die Nullstellen von $t^2 - t - 1$ sind

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \qquad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Für A und B rechnen wir aus:

$$A = \frac{1 - 0 \cdot \beta}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad B = \frac{1 - 0 \cdot \alpha}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Aus Theorem 2.5 folgt die Formel und das Korollar ist bewiesen. ■

2.3 Erzeugende Funktionen

Wir gehen nunmehr dazu über, Lösungen linearer Rekursionsgleichungen nicht mehr nur zu beweisen sondern zu *konstruieren*. Dazu verwenden wir formale Potenzreihen und erzeugende Funktionen. Für diese Begrifflichkeiten sind einige Sachverhalte aus der Analysis (siehe Skriptum „Mathematische Grundlagen der Informatik“) zu wiederholen.

Rekursionen definieren unendliche Folgen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ von Zahlen. Wir repräsentieren eine solche Folge durch eine *formale Potenzreihe* in der Variablen x:

$$A(x) =_{\text{def}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

Die rechte Seite der Definition ist die formale Potenzreihe – „formal“ deshalb, weil Konvergenzfragen von Potenzreihen unbeachtet bleiben. Insbesondere können ganz allgemein die Koeffizienten der Potenzreihe (die Folgenglieder) aus beliebigen Objekten wie z.B. Graphen oder Wörtern bestehen, für die der Konvergenzbegriff gar nicht definiert ist.

Eine formale Potenzreihe kann als Funktion $A(x)$ in x aufgefasst werden. $A(x)$ heißt dann *erzeugende Funktion* der Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Aus der Analysis entnehmen wir folgenden Sachverhalt (Identitätssatz für Potenzreihen):

> *Sind für zwei Folgen $a_0, a_1, \ldots$ und $b_0, b_1, \ldots$ ihre erzeugenden Funktionen $A(x)$ und $B(x)$ gleich, so gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Erzeugende Funktionen repräsentieren also formale Potenzreihen und die zugehörigen Folgen eindeutig.

Bestimmung der erzeugenden Funktion zu einer Folge. Um erzeugende Funktionen zu bestimmen, benutzen wir Regeln zum Rechnen mit formalen Potenzreihen:

- *Addition*: Für zwei Folgen $a_0, a_1, \ldots$ und $b_0, b_1, \ldots$ gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \cdot x^k$$

- *Multiplikation*: Für zwei Folgen $a_0, a_1, \ldots$ und $b_0, b_1, \ldots$ gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot x^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right) \cdot x^n$$

- *Indexverschiebung aufwärts*: Für die Potenzreihe zu der Folge, die aus der Transformation $a_0, a_1, a_2, \ldots \mapsto \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ resultiert, gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^{m+k} = x^m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

- *Indexverschiebung abwärts*: Für die Potenzreihe zu der Folge, die aus der Transformation $a_0, a_1, a_2 \ldots \mapsto a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ resultiert, gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} \cdot x^k = x^{-m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} \cdot x^{k+m} = x^{-m} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \quad - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot x^k \right)$$

- *Differenzieren*: Für die erste Ableitung der Potenzreihe zu $a_0, a_1, \ldots$ gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cdot x^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} \cdot x^k$$

  Die Ableitung einer Potenzreihe entspricht somit der Transformation auf Folgen: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots \mapsto a_1, 2a_2, \ldots, ka_k, \ldots$

Die im Zusammenhang mit linearen Rekursionsgleichungen fundamentale Potenzreihe ist die *geometrische Reihe*

$$A(x) =_{\text{def}} \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

d.h. die formale Potenzreihe von $1, 1, 1, \ldots$ Die erzeugende Funktion $A(x)$ können wir wie folgt explizit bestimmen:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k = 1 + x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x \cdot A(x)$$

Die erzeugende Funktion der Folge $1, 1, 1, \ldots$ ist somit:

$$A(x) = \frac{1}{1-x}$$

Beispiele: Wir wollen die erzeugende Funktion $A(x) = (1-x)^{-1}$ von $1, 1, 1, \ldots$ benutzen, um beispielhaft weitere Potenzreihen und erzeugende Funktionen zu bestimmen.

1. Die erzeugende Funktion $B(x)$ von $1, 2, 3, 4, \ldots$ ist die erste Ableitung von $A(x)$:

$$B(x) = A'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Die erzeugende Funktion von $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ ergibt sich durch Indexverschiebung um eine Position aufwärts aus $B(x)$:

$$x \cdot B(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

3. Die erzeugende Funktion von $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ ergibt sich durch Substitution aus $A(x)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x)^k = A(\alpha x) = \frac{1}{1-\alpha x}$$

Die nachfolgende Übersicht fasst einige Beispiele wichtiger Potenzreihen und erzeugender Funktionen zusammen, die benutzt werden können, um erzeugende Funktionen zu einer gegebenen Folge zu bestimmen:

Folgenglied a_k	Folgenanfang	formale Potenzreihe	erzeugende Funktion
1	$1, 1, 1, 1, \ldots$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$\frac{1}{1-x}$
k	$0, 1, 2, 3, \ldots$	$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x^k$	$\frac{x}{(1-x)^2}$
α^k	$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$	$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot x^k$	$\frac{1}{1-\alpha x}$
k^2	$0, 1, 4, 9, \ldots$	$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot x^k$	$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$
$\frac{1}{k}$	$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot x^k$	$\ln \frac{1}{1-x}$
$\frac{1}{k!}$	$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k$	e^x

Bestimmung der Folge zu einer erzeugenden Funktion. Haben wir nun eine erzeugende Funktion $A(x)$ gegeben, wie bestimmen wir die zugehörige Folge? Dazu betrachten wir die n-te Ableitung von $A(x)$ (soweit dies möglich ist, was in unseren Fälle aber stets der Fall ist):

$$A^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \right)^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} k^{\underline{n}} \cdot a_k \cdot x^{k-n}$$

Setzen wir $x = 0$, so ist $x^m = 0$ für $m > 0$ und wir erhalten:

$$A^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

Mithin gilt also für das k-te Folgenglied der zu $A(x)$ gehörenden Folge

$$a_k = \frac{A^{(k)}(0)}{k!}$$

und die zu $A(x)$ gehörende Potenzreihe ist die TAYLOR-Reihe von $A(x)$ (um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$):

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k$$

Beispiel: Es gilt $(e^x)' = e^x$ und somit

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k.$$

Die Methode der erzeugenden Funktionen. Lineare Rekursionsgleichungen können nun mit Hilfe der auf formalen Potenzreihen basierenden *Methode der erzeugenden Funktionen* gelöst werden. Diese Methode vollzieht sich in einer Reihe von Rechenschritten (siehe Kasten).

Schema der Methode der erzeugenden Funktion zur Auflösung linearer Rekursionsgleichungen k-ter Ordnung:

1. Aufstellen der erzeugenden Funktion als Potenzreihe
2. Anwendung der Rekursionsgleichung
3. Umformen der rechten Seite nach der erzeugenden Funktion
4. Auflösen nach der erzeugenden Funktion
5. Ersetzen der neuen rechten Seite durch eine Potenzreihe (TAYLOR-Reihe)
6. Koeffizientenvergleich (nach dem Identitätssatz für Potenzreihen)

Wir wollen die Methode der erzeugenden Funktion exemplarisch an den Fibonacci-Zahlen nachvollziehen.

1. Aufstellen der erzeugenden Funktion als Potenzreihe

Für die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir die erzeugende Funktion $F(x)$ als Potenzreihe:

$$F(x) =_{\text{def}} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^n$$

2. Anwendung der Rekursionsgleichung

Wir setzen zunächst die Anfangsbedingungen und anschließend die rekursive Definition der Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in die Potenzreihe ein:

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n \cdot x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) \cdot x^n \end{aligned}$$

3. Umformen der rechten Seite nach der erzeugenden Funktion

Wir drücken die rechte Seite durch Umformung der Potenzreihe und Indexverschiebung mit Hilfe von $F(x)$ aus:

$$\begin{aligned} F(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} \cdot x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} \cdot x^n \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^{n+2} \\ &= x + x\sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot x^n \\ &= x + x(F(x) - F_0) + x^2 F(x) \\ &= x + xF(x) + x^2 F(x) \end{aligned}$$

4. Auflösen nach der erzeugenden Funktion

Durch Umstellung nach $F(x)$ erhalten wir:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

*5. Ersetzen der neuen rechten Seite durch eine Potenzreihe (*Taylor*-Reihe)*

Anstatt $F(x)$ in eine Taylor-Reihe zu entwickeln, verwenden wir die Partialbruchzerlegung, um $F(x)$ in uns schon bekannte Potenzreihen zu überführen. Wir verwenden für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x}$$

und versuchen A, B, α und β geeignet zu bestimmen. Mit Hilfe des Ansatzes erhalten wir dann für $F(x)$ unter Verwendung der geometrischen Reihe:

$$F(x) = A\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n \; + \; B\sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n$$

Gemäß dem Ansatz müssen die Parameter die beiden folgenden Gleichungen erfüllen:

$$(1-\alpha x)(1-\beta x) = 1 - x - x^2 \tag{2.2}$$

$$A(1-\beta x) + B(1-\alpha x) = x \tag{2.3}$$

Aus Gleichung (2.2) folgt $1-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2 = 1-x-x^2$ und mithin durch Koeffizientenvergleich $\alpha+\beta = 1$ und $\alpha\beta = -1$. Daraus folgt $\alpha(1-\alpha) = -1$ und somit $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Durch Bestimmung der Nullstellen erhalten wir

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Aus Gleichung (2.3) folgt zunächst:

$$\begin{aligned} x &= A(1-\beta x) + B(1-\alpha x) \\ &= A - A\beta x + B - \alpha B x \\ &= A + B - (A\beta + B\alpha)x \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die Bedingungen $A+B = 0$ und $A\beta+B\alpha = -1$. Folglich muss $A(\beta-\alpha) = -1$ gelten. Durch Einsetzen der konkreten Werte für α und β erhalten wir:

$$A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = -A\sqrt{5} = -1$$

Damit finden wir für die Parameter A und B die Werte

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Die erzeugende Funktion $F(x)$ ist somit durch folgende Potenzreihe ausdrückbar:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot x\right)^n \; - \; \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot x\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \; - \; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\cdot x^n \end{aligned}$$

6. Koeffizientenvergleich

Da wir die für $F(x)$ angesetzte Potenzreihe nur algebraisch äquivalent umgeformt haben, können wir einen Koeffizientenvergleich durchführen und erhalten als Ergebnis für die n-te Fibonacci-Zahl:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \; - \; \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

2.4 Höhere Rekursionsgleichungen

Die Methode der erzeugenden Funktion kann auch auf nichtlineare Rekursionsgleichungen angewendet werden. Dies führt unter Umständen zu sehr komplizierten Berechnungen, die häufig zu keinen geschlossen darstellbaren Ergebnissen führen. Wir wollen an einem Beispiel aus der Kombinatorik höhere Rekursionsgleichungen diskutieren.

Catalanzahlen. Wir betrachten das Problem, die Anzahl korrekt geklammerter Zeichenkette zu zählen. Eine Zeichenkette ist korrekt geklammert, wenn es für jede öffnende Klammer eine schließende existiert. Beispielsweise sind (()) und ()(()) korrekt geklammert; ((()))() ist dagegen nicht korrekt geklammert. Formal: Ein Wort $x = x_1 \dots x_n \in \{(,)\}^*$ heißt *legaler Klammerausdruck*, falls gilt:

(i) $\|\{\ i \mid 1 \le i \le n \text{ und } x_i = (\ \}\| = \|\{\ i \mid 1 \le i \le n \text{ und } x_i =)\ \}\|$

(ii) $\|\{\ i \mid 1 \le i \le j \text{ und } x_i = (\ \}\| \ge \|\{\ i \mid 1 \le i \le j \text{ und } x_i =)\ \}\|$ für alle $j \in \{1, \dots, n-1\}$

Klarerweise müssen legale Klammerausdrücke stets eine gerade Länge besitzen. Die *n-te Catalanzahl* C_n ist definiert als die Anzahl legaler Klammerausdrücke mit genau n öffnenden Klammern; $C_0 =_{\text{def}} 1$.

Beispiele:

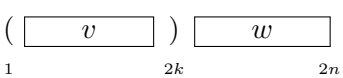
1. $C_1 = 1$, denn () ist einziger legaler Klammerausdruck mit einer öffnenden Klammer.
2. $C_2 = 2$, denn ()() und (()) sind die einzigen legalen Klammerausdrücke mit zwei öffnenden Klammer.
3. $C_3 = 5$, denn ()()(), (())(), ()(()), (()()) und ((())) sind die einzigen legalen Klammerausdrücke mit drei öffnenden Klammer.

Catalanzahlen können gemäß folgender Rekursion bestimmt werden.

Lemma 2.7 *Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt*

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k}.$$

Beweis: (*kombinatorisch*) Es sei $A_{n,k}$ die Menge legaler Klammerausdrücke, bei denen die erste öffnende Klammer an der Position $2k$ geschlossen wird, d.h., Wörter der Form



Das Wort v enthält $k-1$ öffnende Klammern, w enthält $n-k$ öffnende Klammern. Somit folgt $\|A_{n,k}\| = C_{k-1} \cdot C_{n-k}$. Wegen $A_{n,k} \cap A_{n,k'} = \emptyset$ für $k \neq k'$ gilt

$$C_n = \left\| \bigcup_{k=1}^{n} A_{n,k} \right\| = \sum_{k=1}^{n} \|A_{n,k}\| = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Theorem 2.8 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Beweis: Wir verwenden die Methode der erzeugenden Funktion.

1. Aufstellen der erzeugenden Funktion als Potenzreihe: Wir definieren $C(x)$ als

$$C(x) =_{\text{def}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n$$

2. Anwendung der Rekursionsgleichung: Mit Hilfe von Lemma 2.7 erhalten wir

$$C(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k} \right) x^n$$

3. Umformen der rechten Seite nach der erzeugenden Funktion: Wir rechnen weiter aus

$$\begin{aligned}
C(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot C_{n-k} \right) x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-1-k} \right) x^n \\
&= 1 + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot C_{n-1-k} \right) x^{n-1} \\
&= 1 + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k} \right) x^n \\
&= 1 + x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n \right)^2 \\
&= 1 + x \cdot C(x)^2
\end{aligned}$$

4. Auflösen nach der erzeugenden Funktion: Es gilt also $0 = x \cdot C(x)^2 - C(x) + 1$ bzw.

$$\left(C(x) - \frac{1}{2x}\right)^2 - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x} = 0.$$

Somit folgt $\left|C(x) - \frac{1}{2x}\right| = \frac{\sqrt{1-4x}}{2x}$, d.h.

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Wegen $C(0) = C_0 = 1$ entfällt die Lösung für $+$ und die erzeugende Funktion ist:

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

*5. Ersetzen der neuen rechten Seite durch eine Potenzreihe (*Taylor*-Reihe)*: Um $C(x)$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, betrachten wir zunächst die Funktion $f(z) =_{\text{def}} \sqrt{1-z}$. Für $n \geq 1$ gilt:

$$f^{(n)}(z) = -\frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2} \cdot (1-z)^{-k+\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

Gleichung (2.4) beweisen wir mittels vollständiger Induktion über n:

- *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ gilt $f'(z) = \left((1-z)^{\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot (1-z)^{-\frac{1}{2}}$.
- *Induktionsschritt*: Für $n > 1$ gilt mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(z) &= \left(f^{(n-1)}(z)\right)' \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n-2} \frac{2k-1}{2} \cdot \left((1-z)^{-(n-1)+\frac{1}{2}}\right)' \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n-2} \frac{2k-1}{2} \cdot \underbrace{\left(-(n-1)+\frac{1}{2}\right)}_{-\frac{2n-1}{2}} \cdot (1-z)^{-(n-1)+\frac{1}{2}-1} \cdot (-1) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2} \cdot (1-z)^{-n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung (2.4) gezeigt und wir erhalten für $f(z)$ die folgende Taylor-Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^k$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^k \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{n!} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2} \cdot z^n \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2} \cdot z^{n+1} \\
&= 1 - \frac{z}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2} \cdot z^n
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun für $1 - \sqrt{1-4x} = 1 - f(4x)$:

$$\begin{aligned}
1 - \sqrt{1-4x} &= 1 - \left(1 - \frac{4x}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2} \cdot 4^n \cdot x^n\right) \\
&= 2x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot x^n
\end{aligned}$$

Mithin erhalten wir für die erzeugende Funktion $C(x)$:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot x^n$$

6. Koeffizientenvergleich: Aus der Potenzreihendarstellung von $C(x)$ gewinnen für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \\
&= \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \,\cdots\, \cdot (2n-1) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \,\cdots\, \cdot (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \,\cdots\, \cdot (2n)} \\
&= \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \\
&= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ∎

Graphentheorie 3

Graphen sind kombinatorische Strukturen zur Beschreibung binärer Relationen.

3.1 Grundbegriffe

Im Folgenden beschränken wir uns auf das Studium ungerichteter Graphen.

Definition 3.1 *Ein* Graph G *ist ein Paar* (V, E)*, wobei* V *eine endliche, nichtleere Mengen von* Knoten *ist und* E *eine Teilmenge aller zweielementigen Teilmengen von* V *ist:*

$$E \subseteq \mathcal{P}_2(V) =_{\text{def}} \{\ \{x, y\} \mid x, y \in V \wedge x \neq y\ \}$$

Die Elemente von E *heißen* Kanten.

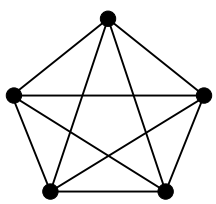
Ein Graph $G = (V, E)$ kann wie folgt visualisiert werden:

- Die Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ wird durch eine Menge von Punkten in der Ebene dargestellt.
- Für eine Kante $e = \{v_i, v_k\} \in E$ verbinden wir v_i und v_k mit einer Linie.

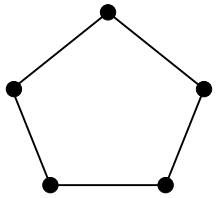
Wir unterscheiden zwischen *markierten* und *unmarkierten* Graphen. Bei einem markierten Graphen spielen die Namen der Knoten eine Rolle, wobei wir den jeweiligen Namen direkt neben den Knoten schreiben. Bei unmarkierten Graphen lassen wir die Knotennamen weg.

Beispiele: Wir erwähnen einige wichtige Typen unmarkierter Graphen.

1. K_n bezeichnet einen *vollständigen* Graphen mit n Knoten, d.h., alle Knoten sind miteinander verbunden. Der K_5 kann beispielsweise wie folgt dargestellt werden:

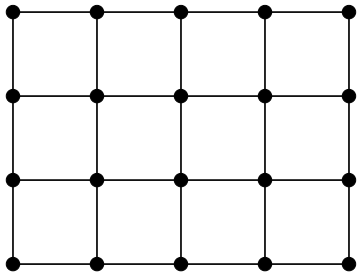


2. C_n bezeichnet einen *Kreis* mit n Knoten, die jeweils zyklisch verbunden sind. Der C_5 kann beispielsweise wie folgt dargestellt werden:

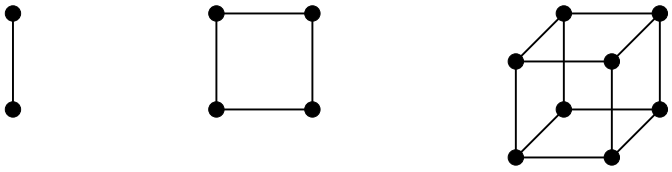


3. P_n bezeichnet einen *Pfad* mit $n+1$ Knoten und n Kanten, die aufeinander folgende Knoten verbinden. Der P_4 kann beispielsweise wie folgt dargestellt werden:

4. $M_{m,n}$ bezeichnet einen *Gittergraph* mit m Zeilen und n Spalten, bei dem die Knoten jeweils zeilen- und spaltenweise verbunden sind. Der $M_{4,5}$ kann beispielsweise wie folgt dargestellt werden:



5. Q_d bezeichnet den *d-dimensionalen Hyperwürfel* mit der Knotenmenge $\{0,1\}^d$ und Kanten zwischen Knoten, die sich in genau einer Komponente unterscheiden. Q_1, Q_2 und Q_3 können beispielsweise wie folgt dargestellt werden:



Bemerkung: In verschiedenen Anwendungen werden manchmal noch zuätzliche Kanten betrachtet:

- *Schleifen*: Kanten, die Knoten v mit sich selbst verbinden
- *Mehrfachkanten*: Knoten u und v können durch mehr als eine Kante verbunden sein.

Wir betrachten ausschließlich schlichte, einfache Graphen, d.h. Graphen ohne Schleifen und Mehrfachkanten.

Definition 3.2 *Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$ ein Knoten.*

1. *Die* Nachbarschaft $N_G(v)$ *von v in G ist definiert als*

$$N_G(v) =_{\text{def}} \{\ u \in V \mid \{v, u\} \in E\ \}.$$

2. *Der* Grad $\deg_G(v)$ *von v in G ist definiert als*

$$\deg_G(v) =_{\text{def}} \|N_G(v)\|.$$

Wenn der Graph G im Kontext klar ist, so lassen wir den Index G sowohl bei der Nachbarschaft als auch beim Grad weg.

Beispiele:

1. Für alle Knoten v im K_n gilt $\deg(v) = n - 1$.
2. Für alle Knoten v im C_n gilt $\deg(v) = 2$.
3. Für alle Knoten v im Q_d gilt $\deg(v) = d$.

Wir führen weitere Begriffe für einen Graphen $G = (V, E)$, Knoten $u, v \in V$ und eine Kante $e \in E$ ein:

- G heißt *k-regulär* $\iff_{\text{def}}$ für alle $v \in V$ gilt $\deg(v) = k$.
- u und v heißen *adjazent* $\iff_{\text{def}}$ $e = \{u, v\} \in E$ (d.h. u, v sind *Endknoten* von e).
- u und e heißen *inzident* $\iff_{\text{def}}$ $u \in e$ (d.h. u ist *Endknoten* von e).

Beispiele:

1. K_n, C_n, Q_d sind $(n-1)$-, 2- bzw. d-regulär; $M_{m,n}$ ist nicht regulär.
2. Im K_n sind alle Knoten adjazent.
3. Im C_n ist jeder Knoten mit genau zwei Kanten inzident.

Proposition 3.3 *Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot \|E\|.$$

Beweis: (*Doppeltes Abzählen*) Es sei $e = \{u, v\} \in E$ eine Kante. Wie oft trägt e zu beiden Seiten der Gleichung bei?

- *Linke Seite*: Für beide Endknoten u und v trägt e jeweils 1 zum Grad bei, d.h., e wird zweimal gezählt.
- *Rechte Seite*: e wird zweimal gezählt.

Somit wird e auf beiden Seite gleich oft gezählt und die Proposition ist bewiesen. ■

Korollar 3.4 *Für jeden Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.*

Beweis: Es sei $V_i =_{\text{def}} \{\ v \in V \mid \text{mod}(\deg(v), 2) = i\ \}$, d.h., V_0 enthält die Knoten mit geradem Grad, V_1 die mit ungeradem Grad. Es gilt $V = V_0 \cup V_1$ und $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. Somit gilt mit Proposition 3.3:

$$2 \cdot \|E\| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_0} \deg(v) \quad + \sum_{v \in V_1} \deg(v)$$

Damit die rechte Summe gerade wird, muss also $\|V_1\|$ gerade sein und das Korollar ist bewiesen. ■

Definition 3.5 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

1. *Ein* Weg *(oder* Kantenzug*) der Länge k in G ist eine Folge*

   $$W =_{\text{def}} (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$$

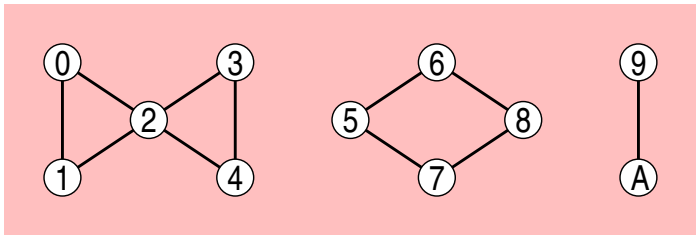
   mit $v_0, \ldots, v_k \in V$, $e_1, \ldots, e_k \in E$ sowie $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$. Der Knoten v_0 heißt Anfangsknoten *von W; der Knoten v_k heißt* Endknoten *von W; die anderen Knoten heißen* innere Knoten*. Eine Weg mit u als Anfangsknoten und v als Endknoten heißt* (u, v)-Weg*.*

2. *Ein* Pfad *in G ist ein knotendisjunkter Weg in G, d.h., alle Knoten auf dem Weg sind paarweise verschieden.*

3. *Ein* Kreis *in G ist ein Weg mit gleichem Anfangs- und Endknoten.*

4. *Ein* einfacher Kreis *in G ist ein Kreis der Länge $k \geq 3$, bei dem alle inneren Knoten paarweise verschieden und verschieden zum Anfangs- und Endknoten sind.*

Wenn uns die Kanten nicht interessieren, dann lassen wir der Beschreibung eines Weges $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ die Kanten $e_1, \ldots, e_k$ weg und sprechen stattdessen vom Weg $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. Dabei gilt jedoch nach wie vor $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.



Beispiel:

1. Im obigen Graphen sind $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 3, 4, 2, 1)$, $(5, 6, 5, 7)$ Wege der Längen 2, 5 und 3; nur $(0, 1, 2)$ ist ein Pfad. Die Folge $(2, 3, 4, 5, 6)$ ist kein Weg. Die Folge (0) ist ein Weg der Länge 0.
2. $(0, 1, 2, 0)$ und $(6, 8, 7, 5, 6)$ sind einfache Kreise der Längen 3 und 4; der $(0, 0)$-Weg $(0, 2, 3, 4, 2, 1, 0)$ ist ein Kreis, aber kein einfacher Kreis.

Proposition 3.6 *Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und $u, v \in V$ Knoten.*

1. *Gibt es einen (u, v)-Weg in G, so gibt es einen (u, v)-Pfad in G.*
2. *Liegt die Kante $\{u, v\}$ auf einem kantendisjunkten Kreis in G, so liegt $\{u, v\}$ auf einem einfachen Kreis in G.*

Beweis: Übungsaufgabe. ■

Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt *Teilgraph* von $G = (V_G, E_G)$, falls $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$ gilt. Wir schreiben dafür $H \subseteq G$. Gilt sogar $E_H = E_G \cap \mathcal{P}_2(V_H)$, so heißt H *induzierter Teilgraph* und wir notieren $H = G[V_H]$.

Beispiel:

1. Die beiden Graphen

sind Teilgraphen des obigen Graphen. Der linke Teilgraph ist jedoch kein induzierter Teilgraph, der rechte dagegen schon.

2. Die durch die Knotenmengen $\{4,5,6,7\}$ und $\{5,6,7,8\}$ in obigem Graphen G induzierten Teilgraphen $G[\{4,5,6,7\}]$ und $G[\{5,6,7,8\}]$ sind die folgenden:

Definition 3.7 *Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und $C \subseteq G$ ein induzierter Teilgraph.*

1. *G heißt* zusammenhängend*, falls für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ ein (u, v)-Pfad in G existiert.*

2. *C heißt* Zusammenhangskomponente *von G, falls C zusammenhängend und ein knotenmaximaler induzierter Teilgraph mit dieser Eigenschaft ist.*

Jeder Knoten v eines Graphen $G = (V, E)$ liegt in einer Zusammenhangskomponente, denn der induzierte Teilgraph $G[\{v\}]$ ist beispielsweise zusammenhängend. Außerdem sind zwei Zusammenhangskomponenten entweder identisch oder knotendisjunkt. Somit lässt sich als disjunkte Vereinigung von Knotenmengen $V_1, \ldots, V_\ell$ schreiben, wobei $G[V_j]$ gerade eine Zusammenhangskomponente ist.

Beispiel: Der obiger Graph besteht genau aus den Zusammenhangskomponenten $G[\{0,1,2,3,4\}]$, $G[\{5,6,7,8\}]$ und $G[\{9,A\}]$.

Theorem 3.8 *Jeder Graph $G = (V, E)$ enthält mindestens $\|V\| - \|E\|$ Zusammenhangskomponenten.*

Beweis: (*Vollständige Induktion*) Wir beweisen den Satz mittels Induktion über $m = \|E\|$.

- *Induktionsanfang*: Es sei $m = 0$. Somit bildet jeder Knoten eine eigene Zusammenhangskomponente. Mithin enthält G genau $\|V\| = \|V\| - 0 = \|V\| - \|E\|$ Komponenten.

- *Induktionsschritt*: Es sei $m > 0$. Somit gibt es eine Kante $e \in E$. Wir wählen eine feste Kante $e \in E$ und betrachten den Graph $G' = (V, E')$ mit $E' =_{\text{def}} E \setminus \{e\}$. Es gilt $\|E'\| = m - 1$ und wir können die Induktionsvoraussetzung anwenden. Damit enthält G' mindestens

$$\|V\| - \|E'\| = \|V\| - (m-1) = \|V\| - m + 1$$

Komponenten. Beim Einfügen von e in G' können zwei Fälle auftreten:

1. Beide Endknoten von e liegen in einer Zusammenhangskomponente von G'. Dann sind die Anzahlen der Komponenten in G und G'gleich.

2. Die Endknoten von e liegen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G'. Damit ist die Anzahl der Komponenten von G um genau 1 kleiner als die Anzahl der Komponenten von G'.

Insgesamt enthält G somit mindestens

$$\begin{aligned}&(\text{Anzahl der Komponenten von } G') - 1\\ &\qquad = (\|V\| - m + 1) - 1 = \|V\| - m = \|V\| - \|E\|\end{aligned}$$

Komponenten.

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Korollar 3.9 *Für jeden zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$ gilt $\|E\| \geq \|V\| - 1$.*

Beweis: Ein zusammenhängender Graph besteht aus genau einer Zusammenhangskomponente. Nach Theorem 3.8 gilt somit $1 \geq \|V\| - \|E\|$. Durch Umstellung der Ungleichung nach $\|E\|$ ergibt sich das Korollar. ■

3.2 Bäume und Wälder

Definition 3.10 *1. Ein* Baum *ist ein zusammenhängender, kreisfreier Graph.*

2. Ein Wald *ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.*

3. Ein Blatt *eines Baumes ist ein Knoten v mit* $\deg(v) = 1$.

Lemma 3.11 *Jeder Baum $T = (V, E)$ mit $\|V\| \geq 2$ Knoten enthält mindestens zwei Blätter.*

Beweis: Es sei e eine beliebige Kante. Wir laufen von den Endknoten durch den Baum, bis es keine Kante mehr gibt, über die der aktuelle Knoten wieder verlassen werden kann (ohne Zurückgehen). Da T ein Baum ist, wird kein Knoten doppelt besucht. Somit müssen Läufe enden und die gefundenen Knoten sind Blätter. Da e zwei Endknoten besitzt, gibt es mindestens zwei Blätter und das Lemma ist bewiesen. ■

Lemma 3.12 *Es sei $T = (V, E)$ ein Baum mit $\|V\| \geq 2$ und $v \in V$ ein Blatt. Dann ist der Graph $T' =_{\text{def}} T[V \setminus \{v\}]$ ein Baum.*

Beweis: Durch Wegnahme von Knoten und Kanten können keine neuen Kreise entstehen; somit ist T' kreisfrei, da T kreisfrei ist. Es sei $x, y \in V \setminus \{v\}$. Da T zusammenhängend ist, gibt es einen (x, y)-Pfad P in T. Für jeden Knoten $u \notin \{x, y\}$ auf dem Pfad P gilt mithin $\deg(u) \geq 2$. Somit liegt v nicht auf P. Der Pfad P existiert also auch in T'. Damit ist T' zusammenhängend und das Lemma ist bewiesen. ■

Theorem 3.13 *Für jeden Baum $T = (V, E)$ gilt $\|E\| = \|V\| - 1$.*

Beweis: (*Induktion*) Wir führen einen Beweis mittels vollständiger Induktion über die Anzahl n der Knoten von V, d.h., wir beweisen die Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}_+$ und alle Bäume $T = (V, E)$ mit $\|V\| = n$ gilt $\|E\| = \|V\| - 1$.

- *Induktionsanfang*: Es sei $n = 1$. Dann gilt für jeden Baum T mit einem Knoten $\|E\| = 0$ und folglich $\|E\| = \|V\| - 1$.
- *Induktionsschritt*: Es sei $n > 1$. Es sei $T = (V, E)$ ein Baum mit $\|V\| = n \geq 2$ Knoten. Dann gibt es nach Lemma 3.11 ein Blatt $v \in V$ mit der zugehörigen Kante $e = \{u, v\} \in E$. Wir definieren $T' =_{\text{def}} T[V \setminus \{v\}]$. Nach Lemma 3.12 ist T' ein Baum. Außerdem besteht T' aus $n - 1$ Knoten und besitzt somit nach Induktionsvoraussetzung $n - 2$ Kanten. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \|V\| &= \|V \setminus \{v\} \cup \{v\}\| = \|V \setminus \{v\}\| + \|\{v\}\| = (n-1) + 1 = n \\ \|E\| &= \|E \setminus \{e\} \cup \{e\}\| = \|E \setminus \{e\}\| + \|\{e\}\| = (n-2) + 1 = n - 1 \end{aligned}$$

  Mithin gilt $\|E\| = \|V\| - 1$.

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Lemma 3.14 *Es seien $T = (V, E)$ ein Baum, $v \in V$ ein Knoten und $T_1, \ldots, T_k$ die Komponenten von $T[V \setminus \{v\}]$. Dann gilt $k = \deg(v)$ und $T_1, \ldots, T_k$ sind Bäume.*

Beweis: Da T zusammenhängend und kreisfrei, sind $T_1, \ldots, T_k$ zusammenhängend und kreisfrei, d.h., $T_1, \ldots, T_k$ sind Bäume. Es sei $T_i = (V_i, E_i)$ die i-te Komponente von $T[V \setminus \{v\}]$. Dann gilt:

- Jeder Knoten aus $V \setminus \{v\}$ gehört zu einem T_i, d.h., es gilt

$$\|V\| = 1 + \sum_{i=1}^{k} \|V_i\|$$

- Jede Kante $e \in E$ mit $v \in e$ gehört zu einem T_i, d.h., es gilt

$$\|E\| = \deg(v) + \sum_{i=1}^{k} \|E_i\|$$

Mit Hilfe von Theorem 3.13 erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} \|V\| - 1 &= \deg(v) + \sum_{i=1}^{k} (\|V_i\| - 1) \\ &= \deg(v) + \sum_{i=1}^{k} \|V_i\| \quad - k \\ &= \deg(v) + \|V\| - 1 - k \end{aligned}$$

Umstellung nach $\deg(v)$ ergibt $\deg(v) = k$ und das Lemma ist bewiesen. ■

Lemma 3.15 *Es seien $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und C ein einfacher kreis in G. Dann gilt für alle auf C liegenden Kanten e, dass der Graph $(V, E \setminus \{e\})$ zusammenhängend ist.*

Beweis: (*Widerspruch*) Angenommen es gibt eine Kante $e = \{u, v\} \in C$, sodass der Graph $G - e =_{\text{def}} (V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend ist. Dann liegen die Endknoten u und v in verschiedenen Komponenten von $G - e$. Da aber e auf einem einfachen Kreis C liegt gibt es einen (u, v)-Pfad, der e nicht enthält (wir laufen in C einfach „außen“ herum). Somit existiert der (u, v)-Pfad auch in $G - e$. Folglich liegen u und v in der gleichen Komponenten. Dies ist ein Widerspruch und somit muss $G - e$ zusammenhängend sein, egal welche Kante aus dem Kreis aus G entfernt wird. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Ein Graph $T = (V_T, E_T)$ heißt *Spannbaum* (oder *aufspannender Baum*) eines Graphen $G = (V_G, E_G)$, falls T ein Baum mit $V_T = V_G$ und $E_T \subseteq E_G$ ist.

Theorem 3.16 *Jeder zusammenhängende Graph $G = (V, E)$ enthält einen Spannbaum.*

Beweis: Für $\|V\| = 1$ gilt die Aussage trivialerweise. Es sei also $G = (V, E)$ ein Graph mit $\|V\| \geq 2$ und $\|E\| = m$. Wir definieren eine Folge $E_0, E_1, \ldots, E_m$ von Kantenmengen in G wie folgt:

$$E_0 =_{\text{def}} E$$

$$E_i =_{\text{def}} \begin{cases} E_{i-1} \setminus \{e_i\}, & \text{wobei } e_i \in E_{i-1} \text{ eine beliebige auf einem Kreis in } (V, E_{i-1}) \\ & \text{liegende Kante ist} \\ E_{i-1}, & \text{falls kein Kreis in } (V, E_{i-1}) \text{ existiert} \end{cases}$$

Klarerweise gilt $E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_m$. Nach Lemma 3.15 ist (V, E_m) zusammenhängend und kreisfrei, da höchstens m Kanten aus G entfernt werden können. Somit ist (V, E_m) ein Spannbaum und das Theorem ist bewiesen. ■

Theorem 3.17 (Cayley**)** *Für $n \geq 2$ gibt es genau n^{n-2} markierte Bäume.*

Beweis: Wir konstruieren eine Bijektion zwischen der Menge aller markierten Bäume mit n Knoten und Menge $\{1,\ldots,n\}^{n-2}$. Dabei fassen wir die Elemente von $\{1,\ldots,n\}^{n-2}$ als Wörter der Länge $n-2$ über dem Alphabet $\{1,\ldots,n\}$ auf. Wir betrachten folgende Abbildung φ für einen Baum $T=(V,E)$ mit $T \subseteq [n]$:

$$\begin{array}{lll} \varphi(T) & =_{\text{def}} \quad \varepsilon, & \text{falls } \|V\| = 2 \\ \varphi(T) & =_{\text{def}} \quad v \cdot \varphi(T[V \setminus \{u\}]), & \text{wobei } u \text{ das kleinste Blatt in } T \text{ ist und} \\ & & v \text{ der zu } u \text{ adjazente Knoten ist} \end{array}$$

Nach Lemma 3.12 sind die induzierten Teilgraphen stets Bäume. Außerdem gilt: Jeder Knoten v von T kommt $(\deg(v)-1)$-mal im Wort $\varphi(T)$ vor. Somit erhalten wir für die Länge:

$$\begin{aligned} |\varphi(T)| &= \sum_{v \in V} (\deg(v) - 1) \\ &= \sum_{v \in V} \deg(v) \quad - \|V\| \\ &= 2 \cdot \|E\| - \|V\| \\ &= 2 \cdot (\|V\| - 1) - \|V\| \\ &= \|V\| - 2 \end{aligned}$$

Die Injektivität der Abbildung ist leicht zu sehen.

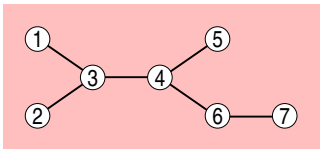
Zum Nachweis der Bijektivität der Abbildung φ geben wir an, wie wir zu einem gegebenen Wort $t = t_1 \ldots t_{n-2}$ einen Baum T finden mit $\varphi(T) = t$:

```
[1]   S := ∅
[2]   E := ∅
[3]   for i := 1 to n − 2 do
[4]       s_i := min [n] \ (S ∪ {t_i, ..., t_{n−2}})
[5]       E := E ∪ {{s_i, t_i}}
[6]       S := S ∪ {s_i}
[7]   E := E ∪ {[n] \ S}
```

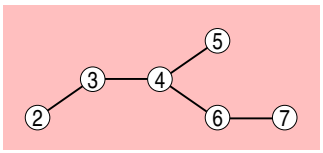
Damit ist φ surjektiv und somit bijektiv. Es gibt also genauso viele Bäume, wie es Wörter in $\{1,\ldots,n\}^{n-2}$ gibt. Dies sind nach der Produktregel der Kombinatorik n^{n-2} viele. Damit ist das Theorem bewiesen. ∎

Die im Beweis angegebene Kodierung eines markierten Baumes als Wort heißt *Prüfer-Code* nach dem Erfinder der Kodierung.

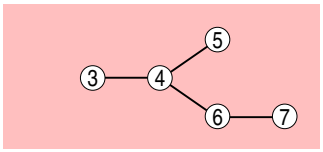
Beispiel: Wir bestimmen den Prüfer-Code von $T = T_0$ zu $\varphi(T) = 33446$:



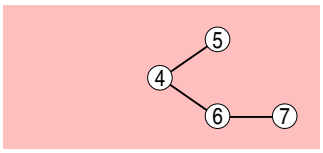
$\varphi(T_0) = 3\varphi(T_1)$



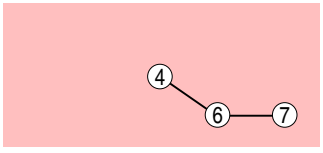
$\varphi(T_0) = 33\varphi(T_2)$



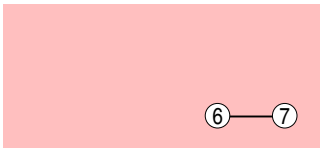
$\varphi(T_0) = 334\varphi(T_3)$



$\varphi(T_0) = 3344\varphi(T_4)$



$\varphi(T_0) = 33446\varphi(T_5)$



$\varphi(T_0) = 33446$

Aus dem Wort 33446 bestimmen wieder den Baum T:

i	s_i	S	$t_i \dots t_{n-2}$	E
0	–	$\emptyset$	33446	$\emptyset$
1	1	$\{1\}$	3446	$\{\{1,3\}\}$
2	2	$\{1,2\}$	446	$\{\{1,3\},\{2,3\}\}$
3	3	$\{1,2,3\}$	46	$\{\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\}\}$
4	5	$\{1,2,3,5\}$	6	$\{\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\}\}$
5	4	$\{1,2,3,4,5\}$	ε	$\{\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,6\}\}$
–	–	–	–	$\{\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{6,7\}\}$

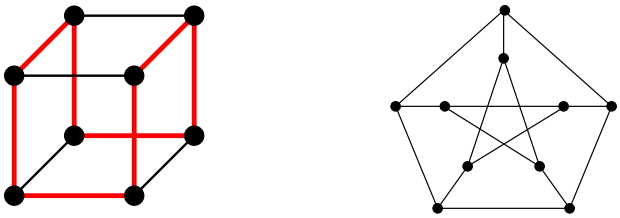
3.3 Vollständige Kreise*

Im Folgenden interessieren wir uns für die Existenz spezieller Kreise in Graphen, die alle Elemente eines Graphen genau einmal enthalten. Die Elemente können dabei Knoten (Hamiltonkreise) oder Kanten (Eulertouren) sein.

Definition 3.18 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

1. *Ein* Hamiltonkreis *in G ist ein Kreis, der jeden Knoten von V genau einmal enthält.*
2. *G heißt* hamiltonsch, *falls G einen Hamiltonkreis enthält.*

Beispiele: Der Q_3 auf der linken Seite ist hamiltonsch. Der rechte Graph ohne Hamiltonkreis ist der Petersen-Graph:



Der aus den roten Kanten bestehende Weg ist ein Hamiltonkreis.

Zu entscheiden, ob ein gegebener Graph hamiltonsch ist, ist ein NP-vollständiges Problem, d.h., algorithmisch nicht effizient beherrschbar. Wir interessieren uns daher für hinreichende Kriterien für die Existenz von Hamiltonkreisen. Intuitiv sollte zu erwarten sein, dass die Wahrscheinlichkeit einen Hamiltonkreise zu finden, umso höher ist, je mehr Kanten ein Graph enthält.

Theorem 3.19 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Gilt für alle nicht-adjazenten Knoten $x, y \in V$ (d.h., $x \neq y$ und $\{x, y\} \notin E$) die Ungleichung*

$$\deg(x) + \deg(y) \geq \|V\|,$$

so enthält G einen Hamiltonkreis.

Beweis: (*Widerspruch*) Wir nehmen an, dass es einen Graphen $G = (V, E)$ mit obiger Eigenschaft für alle nicht-adjazenten Knotenpaare gibt, der aber nicht hamiltonsch ist. Wir wählen $G = (V, E)$ so aus allen diesen Graphen über der Knotenmenge V, dass $\|E\|$ maximal ist. Dann ist G nicht der vollständige Graph K_n mit $n = \|V\|$, da dieser einen Hamiltonkreis enthält. Somit gibt es Knoten $x, y \in V$ mit $x \neq y$ und $\{x, y\} \notin E$.

Wir betrachten nun den Graphen $G' =_{\text{def}} (V, E \cup \{\{x, y\}\})$, der aus G durch Einfügung der Kante $\{x, y\}$ entsteht. Dann enthält G' einen Hamiltonkreis C, da G ein kantenmaximaler Graph ohne Hamiltonkreis ist, und C enthält die Kante $\{x, y\}$, da G eben keinen Hamiltonkreis enthält. Es sei $C = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ mit $v_1 = x$ und $v_n = y$. Wir definieren die beiden Mengen:

$$\begin{aligned} S &=_{\text{def}} \{\ v_i \mid 1 \leq i < n \ \wedge\ \{x, v_{i+1}\} \in E\ \} \\ T &=_{\text{def}} \{\ v_i \mid 1 \leq i < n \ \wedge\ \{x, v_i\} \in E\ \} \end{aligned}$$

Dann gilt $y = v_n \notin S \cup T$ (wegen $\{x, y\} \notin E$) sowie $\|S \cup T\| < \|V\|$. Damit ergibt sich mit Hilfe der Voraussetzung:

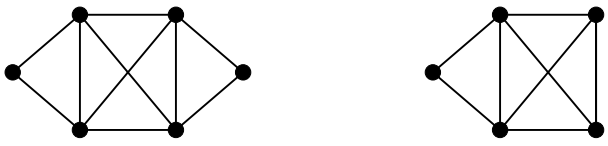
$$\begin{aligned} \|S \cap T\| &= \|S\| + \|T\| - \|S \cup T\| \\ &= \deg(x) + \deg(y) - \|S \cup T\| \\ &\geq \|V\| - \|S \cup T\| \\ &> \|V\| - \|V\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mithin gibt es ein $v_i \in S \cap T$. Werden in C die Kanten $\{x, y\}$ und $\{v_i, v_{i+1}\}$ durch $\{x, v_{i+1}\}$ und $\{y, v_i\}$ ersetzt, so entsteht ein Hamiltonkreis ohne $\{x, y\}$, also in G. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass G nicht hamiltonsch ist, und das Theorem ist bewiesen. ■

Definition 3.20 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

1. *Eine* Eulertour *in G ist ein Kreis, der jede Kante von G genau einmal durchläuft.*
2. *G heißt* eulersch*, falls G eine Eulertour enthält.*

Beispiele: Der linke Graph ist eulersch und der rechte Graph dagegen nicht:



Theorem 3.21 (Euler**)** *Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist genau dann eulersch, wenn alle Knoten geraden Grad haben.*

Beweis: Wir beweisen beide Richtungen einzeln.

($\Rightarrow$) Offensichtlich: Jeder Knoten muss besucht und wieder verlassen werden.

($\Leftarrow$) Wir benutzen folgendes Verfahren, um eine Eulertour zufinden: Wir starten bei einem beliebigen Knoten v_1 und durchlaufen Kanten in beliebiger Reihenfolge (ohne eine Kante zweimal zu benutzen). Da die Knotengrade alle gerade sind, muss der Weg W_1 wieder in v_1 enden. Liegen nicht alle Knoten auf W_1, so gibt es einen Knoten v_2 auf W_1, der zu einer nicht benutzten Kante inzident ist. Wir starten das Verfahren auf v_2, um einen Weg W_2 zu bekommen, der wieder in v_2 endet. Wir können nun die beiden Wege W_1 und W_2 zu dem längeren Weg

$$(\underbrace{v_1, \ldots, v_2}_{W_1}, \underbrace{\ldots, v_2}_{W_2}, \underbrace{\ldots, v_1}_{W_1})$$

verschmelzen, der jede Kante nur einmal benutzt. Wenden wir das Verfahren nun iterativ solange an, bis alle Knoten besucht sind, so erhalten wir die gesuchte Eulertour.

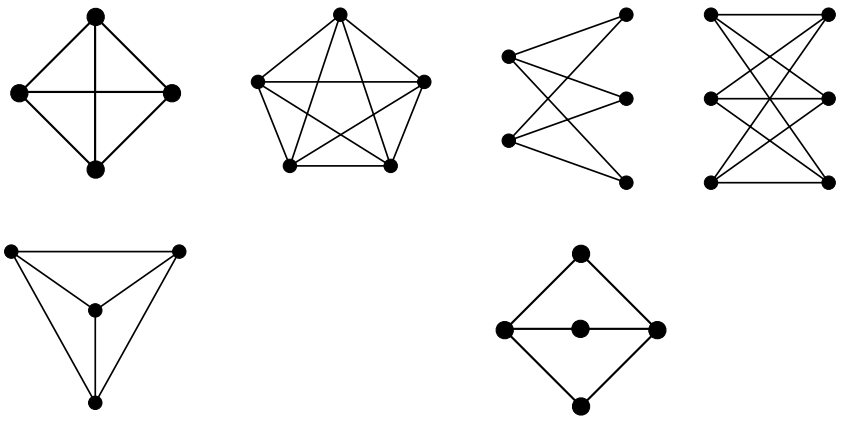
Damit ist das Theorem bewiesen. ■

3.4 Planare Graphen

Definition 3.22 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

1. *G heißt* planar *(oder* plättbar*), falls G so gezeichnet werden kann, dass sich keine Kanten kreuzen.*
2. *G heißt* eben*, falls G planar und in einer kreuzungsfreien Darstellung (Einbettung in der Ebene) gegeben ist.*

Beispiele: Im Folgenden sind der oberen Reihe die vier Graphen K_4, K_5, $K_{2,3}$ und $K_{3,3}$ angegeben. Die Reihe darunter enthalten Darstellungen der ebenen Graphen im Falle, dass die darüber liegenden Graphen planar sind.



K_4 und $K_{2,3}$ sind planar, K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Es sei $G = (V, E)$ ein ebener Graph. Ein *Gebiet* (Facette) ist ein Teil der Ebene, der entsteht, wenn die Ebene entlang der Kanten zerschnitten wird.

Beispiele: Wir zählen leicht nach, dass der K_4 vier Gebiete und der $K_{2,3}$ drei Gebiete besitzt. Dabei heißen die endlichen Gebiete im Inneren von Kreisen *innere Gebiete* und das unendliche Gebiet *äußeres Gebiet*.

Theorem 3.23 (Eulersche Polyederformel) *Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ebener Graph. Es sei F die Menge der Gebiete von G. Dann gilt:*

$$\|F\| = \|E\| - \|V\| + 2$$

Beweis: (*Induktion*) Wir führen ein Beweis mittels vollständiger Induktion über den Exzess von Graphen. Der *Exzess* von $G = (V, E)$ ist definiert als

$$\mathrm{ex}(G) =_{\mathrm{def}} \|E\| - \|V\| + k,$$

wobei k die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G ist. Für zusammenhängende Graphen $G = (V, E)$ gilt somit $\mathrm{ex}(G) = \|E\| - \|V\| + 1 \geq 0$.

- *Induktionsanfang*: Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ebener Graph mit $\mathrm{ex}(G) = 0$, d.h. $\|E\| = \|V\| - 1$. Somit ist G ein Baum. Da G keine Kreise enthält, gibt es genau *ein* Gebiet und es gilt $1 = \|E\| - \|V\| + 2$.
- *Induktionsschritt*: Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ebener Graph mit $\mathrm{ex}(G) > 0$. Somit ist G kein Baum. Es gibt also einen einfachen Kreis C in G. Es sei e eine beliebige Kante auf C. Die Kante e trennt das Gebiet f_1 innerhalb des Kreises C von dem Gebiet f_2 außerhalb von C. Es sei $G' =_{\mathrm{def}} (V, E \setminus \{e\})$ der ebene Graph, der aus G entsteht, wenn e entfernt wird. Dadurch verschmelzen die Gebiet f_1 und f_2 zu einem Gebiet in G'. Außerdem ist G' nach ... wieder zusammenhängend, also gilt $\mathrm{ex}(G') = \mathrm{ex}(G) - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt somit:

$$\|F\| = \underbrace{\|F\| - 1}_{\text{Gebiete von } G'} + 1 = \underbrace{\|E\| - 1}_{\text{Kanten von } G'} - \|V\| + 2 + 1 = \|E\| - \|V\| + 2$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ∎

Theorem 3.24 *Für jeden planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $\|V\| \geq 3$ gilt*

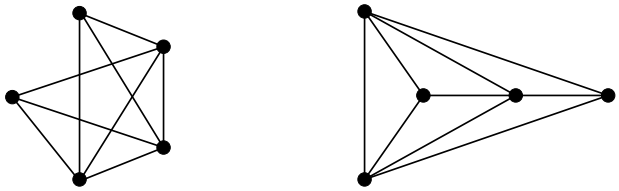
$$\|E\| \leq 3\|V\| - 6.$$

Beweis: Es genügt die Aussage für kantenmaximale planare Graphen zu zeigen. Es sei $G = (V, E)$ ein kantenmaximaler planarer Graph. Das Einfügen einer weiteren Kante in G würde also die Planarität zerstören. Somit ist G zusammenhängend. G sei als ebener Graph gegeben. Jede Kante begrenzt höchstens zwei Gebiete von G. Somit gilt $\|F\| \leq 2\|E\|$. Weiterhin wird jedes Gebiet von mindestens drei Kanten begrenzt. Somit folgt $\|F\| \leq \frac{2}{3} \cdot \|E\|$. Mit Theorem 3.23 erhalten wir:

$$\frac{2}{3} \cdot \|E\| \geq \|F\| = \|E\| - \|V\| + 2$$

Umstellung der Ungleichung nach $\|E\|$ ergibt das Theorem. ■

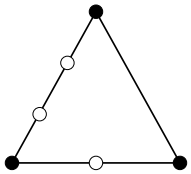
Beispiele: K_5 ist nicht planar, denn es gilt $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Der K_5 hat also eine Kante zuviel. Entfernen wir eine beliebige Kante aus dem K_5, so erhalten wir den fast vollständigen Graphen K_5^*. Dieser erfüllt die Kantenbilanz und ist auch planar:



Der $K_{3,3}$ erfüllt auch die Kantenbilanz, ist jedoch nicht planar (siehe Übungsaufgabe).

Eine *Unterteilung* eines Graphen $G = (V, E)$ entsteht dadurch, dass Kanten $e \in E$ durch neue Pfade p_e ersetzt werden.

Beispiel: Eine Untereilung des K_3 könnte zum Beispiel wie folgt aussehen:



K_5 und $K_{3,3}$ sind gewissermaßen die kleinsten, nicht planaren Graphen. Ohne Beweis geben wir den Satz von Kuratowski an, der planare Graphen durch den Ausschluss von K_5 und $K_{3,3}$ charakterisiert.

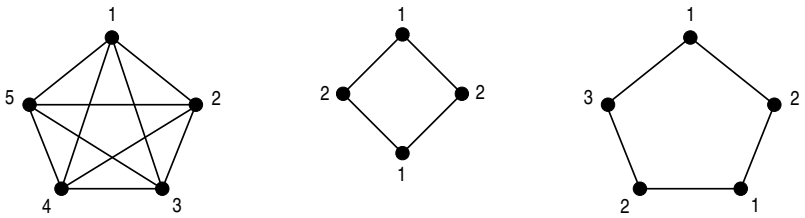
Theorem 3.25 (KURATOWSKI**)** *Ein Graph G ist genau dann planar, wenn G keine Unterteilung des K_5 oder $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.*

3.5 Graphfärbungen

Definition 3.26 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

1. *Eine* Knotenfärbung *von G mit k Farben ist eine Abbildung $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ mit $c(u) \neq c(v)$ für alle Kanten $\{u, v\} \in E$.*
2. *Die* chromatische Zahl $\chi(G)$ *von G ist die minimale Anzahl k von Farben, sodass eine Knotenfärbung von G mit k Farben existiert.*

Beispiele: In den folgenden Abbildung sind Graphfärbungen mit der minimalen Anzahl von Farben gezeigt:



Dazu korrespondieren die allgemeinen Fälle:

1. K_n benötigt n Farben.
2. C_{2n} benötigt 2 Farben.
3. C_{2n+1} benötigt 3 Farben.

Die Graphen mit chromatischer Zahl 2 sind genau die bipartiten Graphen. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls es disjunkte Knotenmengen A und B mit $A \cup B = V$ gibt, sodass die induzierten Teilgraphen $G[A]$ und $G[B]$ keine Kante enthalten. Kanten verlaufen also nur zwischen den Knotenmengen A und B, aber nicht innerhalb der Mengen. Wenn wir uns auf die Bipartitheit beziehen, schreiben wir auch $G = (A \uplus B, E)$. (Hierbei bedeutet $A \uplus B$, dass wir die Vereinigung von zwei disjunkten Mengen A und B bilden.) Der Zusammenhang mit einer Graphfärbung mit zwei Farben ist klar: Die Menge A enthält die Knoten der einen Farbe und die Menge B die Knoten der anderen Farbe.

Theorem 3.27 *Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn er keinen einfachen Kreis ungerader Länge als Teilgraph enthält.*

Beweis: Wir zeigen beide Richtungen einzeln. O.B.d.A. kann der Graph als zusammenhängend angenommen werden. Anderenfalls argumentieren wir für jede Komponente.

($\Rightarrow$) Wir beweisen die Kontraposition. Ein einfacher Kreis C_{2n+1} ungerader Länge benötigt mindestens drei Farben. Somit ist ein Graph, der einen solchen Kreis enthält, nicht bipartit.

($\Leftarrow$) Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, der nur einfache Kreise gerader Länge enthält. Wir wählen einen beliebigen Knoten v und betrachten die zugehörigen Knotenmengen:

$$\begin{aligned} A &=_{\text{def}} \{\ u \mid \text{kürzester } (u,v)\text{-Weg hat gerade Länge } \} \\ B &=_{\text{def}} \{\ u \mid \text{kürzester } (u,v)\text{-Weg hat ungerade Länge } \} \end{aligned}$$

Dann gilt sicherlich $A \cap B = \emptyset$ sowie $A \cup B = V$. Wir müssen noch zeigen, dass die induzierten Teilgraphen $G[A]$ und $G[B]$ keine Kanten enthalten. Es seien $x, y \in V$ zwei verschiedene Knoten, die entweder beide in A oder beide in B liegen. Es seien $P_x = (u_0, u_1, \ldots, u_k)$ mit $x = u_0$ und $u_k = v$ ein kürzester (x,v)-Pfad und $P_y = (u'_0, u'_1, \ldots, u'_{k'})$ mit $y = u'_0$ und $u'_{k'} = v$ ein kürzester (y,v)-Weg. Dann ist $k+k'$ gerade. Es sei u_j der erste Knoten auf P_x, der auch auf P_y vorkommt, d.h., $u_j = u'_{j'}$ für ein geeignetes j'. Betrachten wir die Pfade $P'_x = (u_0, \ldots, u_j, u'_{j'+1}, \ldots, u'_{k'})$ und $P'_y = (u'_0, \ldots, u'_{j'}, u_{j+1}, \ldots, u_k)$, dann sind P'_x wieder ein kürzester (x,v)-Pfad und P'_y ein kürzester (y,v)-Pfad. Mithin gilt $j+k'-j' = k$. Also gilt $j+j' = k+k'+2(j'-k')$, und $j+j'$ ist gerade. Wenn nun $\{x,y\} \in E$ gelten würde, so würde G den einfachen Kreis $(x, \ldots, u_j, u'_{j'-1}, \ldots, y, x)$ der Länge $j+j'+1$ enthalten. Da einfache Kreise ungerader Länge ausgeschlossen sind, gilt $\{x,y\} \notin E$. Somit verlaufen keine Kanten zwischen Knoten in A und keine Kanten zwischen den Knoten in B. Damit ist G bipartit.

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Korollar 3.28 *Für jeden Baum $T = (V, E)$ mit $\|V\| \geq 2$ ist $\chi(T) = 2$.*

Beweis: Wegen der Kreisfreiheit sind Bäume bipartit. Somit gilt $\chi(T) \leq 2$ für jeden Baum $T = (V, E)$. Wegen $\|V\| \geq 2$ enthält T eine Kante, somit ist $\chi(T) \geq 2$. Mithin gilt $\chi(T) = 2$. ■

Ohne Beweis geben wir das folgende berühmte Theorem an, das erstmals 1976 von Appel und Haken unter Einsatz eines Computerprogramms zur Überprüfung von mehr als 1.500 Einzelfällen bewiesen wurde. Insbesondere folgt aus dem Theorem, dass auf politisch-geographischen Landkarten vier Farben genügen, um alle Länder so zu färben, dass Grenzen nur zwischen Ländern unterschiedlicher Farben verlaufen.

Theorem 3.29 (Vierfarbensatz) *Für jeden planaren Graphen ist $\chi(G) \leq 4$.*

Definition 3.30 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

1. *Eine* Kantenfärbung *von G mit k Farben ist eine Abbildung $c : E \to \{1, \ldots, k\}$ mit $c(e) \neq c(f)$ für alle Kanten $e, f \in E$ mit $e \cap f \neq \emptyset$.*

2. *Der* chromatische Index $\chi'(G)$ *von G ist die minimale Anzahl k von Farben, sodass eine Kantenfärbung von G mit k Farben existiert.*

Wiederum ohne Beweis geben wir folgendes Theorem an, das zeigt, dass der chromatische Index eines Graphen nur einen von zwei Werten annehmen kann.

Theorem 3.31 (Vizing) *Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, wobei $\Delta(G)$ der maximale Grad eines Knoten von G ist.*

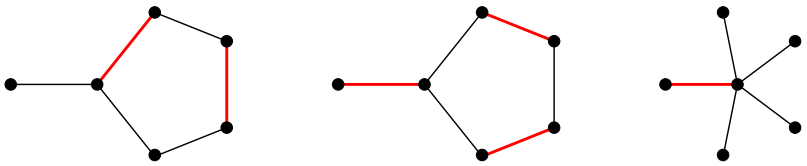
3.6 Matchings in Graphen

Definition 3.32 *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

1. *Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt* Matching *in G, falls $e \cap f = \emptyset$ für alle Kanten $e, f \in M$ mit $e \neq f$ gilt.*
2. *Ein Matching $M \subseteq E$ heißt* perfektes Matching, *falls $\|M\| = \frac{1}{2}\|V\|$ gilt.*

Mit anderen Worten: Ist M ein Matching in einem Graphen G, so ist jeder Knoten v von G zu höchstens einer Kante $e \in M$ inzident. Gilt $v \in e$ für eine Kante $e \in M$, so wird der Knoten v von M *überdeckt*. Ein perfektes Matching überdeckt somit jeden Knoten des Graphen G.

Beispiele: In folgenden Graphen bilden die roten Kanten jeweils Matchings:



Das Matching in der Mitte ist perfekt, während links nur ein weiteres Matching gezeigt ist. Der Sterngraph rechts besitzt kein perfektes Matching.

Für bipartite Graphen können wir die existierenden Matchings genau charakterisieren. Dafür erweitern für einen Graphen $G = (V, E)$ die Schreibweise $N_G(v)$ für die Nachbarschaft eines Knotens v auf die *Nachbarschaft $N_G(X)$ einer Knotenmenge $X \subseteq V$*:

$$N_G(X) =_{\text{def}} \bigcup_{v \in X} N_G(v)$$

Wenn der Graph G aus dem Kontext heraus klar ist, lassen wir wieder den Index G weg.

Theorem 3.33 (Hall; **Heiratssatz**) *Für einen bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$ gibt es genau dann ein Matching M der Kardinalität $\|M\| = \|A\|$, wenn $\|N(X)\| \geq \|X\|$ für alle $X \subseteq A$ gilt.*

Beweis: Wir beweisen beide Richtung einzeln.

($\Rightarrow$) Es sei M ein Matching der Kardinalität $\|M\| = \|A\|$. Jede Teilmenge $X \subseteq A$ hat somit genau $\|X\|$ Nachbarn in B. Folglich gilt $\|N(X)\| \geq \|X\|$.

($\Leftarrow$) Wir führen den Beweis mittels Induktion über die Kardinalität der Menge $\|A\|$.

- *Induktionsanfang*: Für $m = 1$ ist die Aussage offensichtlich.
- *Induktionsschritt*: Es sei $m > 1$. Es sei $G = (A \uplus B, E)$ ein beliebiger bipartiter Graph mit $\|A\| = m$. Wir unterscheiden zwei Fälle:
  - *1. Fall*: Für alle $S \subseteq A$ mit $0 < \|S\| < m$ gilt $\|N(S)\| \geq \|S\| + 1$. Wir konstruieren ein Matching M wie folgt: Es sei $e = \{u, v\} \in E$ eine beliebige Kante mit $u \in A$ und $v \in B$. Für den Graphen $G' =_{\text{def}} G[A \uplus B \setminus \{u, v\}]$ gilt $N_{G'}(X) = N_G(X) \setminus \{v\}$ und mithin $\|N_{G'}(X)\| \geq \|X\|$ für alle $X \subseteq A \setminus \{u\}$. Nach Induktionsvoraussetzung enthält der Graph G' ein Matching M' der Kardinalität $\|M'\| = \|A \setminus \{u\}\| = m - 1$. Somit ist $M =_{\text{def}} M' \cup \{e\}$ ein Matching in G der Kardinalität $\|M\| = \|A\| = m$.
  - *2. Fall*: Es gibt ein $S \subseteq A$ mit $0 < \|S\| < m$ und $\|N(S)\| = \|S\|$. Wir halten ein S fest und konstruieren ein Matching M wie folgt: Es seien

$$\begin{aligned} G' &=_{\text{def}} G[S \cup N_G(S)] \\ G'' &=_{\text{def}} G[(A \setminus S) \cup (N_G(A) \setminus N_G(S))] \end{aligned}$$

    Für alle $X \subseteq S$ gilt $N_{G'}(X) = N_G(X)$ und somit $\|N_{G'}(X)\| \geq \|X\|$. Nach Induktionsvoraussetzung (beachte: $\|S\| \leq m - 1$) gibt es ein Matching M' der Kardinalität $\|M'\| = \|S\|$ in G'. Für alle $X \subseteq A \setminus S$ gilt $N_{G''}(X) \cap N_G(S) = \emptyset$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \|N_{G''}(X)\| &= \|N_{G''}(X) \cup N_G(S)\| - \|N_G(S)\| \\ &= \|N_G(X) \cup N_G(S)\| - \|N_G(S)\| \\ &= \|N_G(X \cup S)\| - \|N_G(S)\| \\ &\geq \|X \cup S\| - \|N_G(S)\| \\ &= \|X\| + \|S\| - \|N_G(S)\| \\ &= \|X\| \end{aligned}$$

    Nach Induktionsvoraussetzung (beachte: $\|S\| \geq 1$ bzw. $\|A \setminus S\| \leq m - 1$) gibt es ein Matching M'' der Kardinalität $\|M''\| = \|A \setminus S\|$ in G''. Da die Menge der durch M' und die Menge der durch M'' überdeckten Knoten disjunkt sind, ist $M =_{\text{def}} M' \cup M''$ ein Matching in G der Kardinalität $\|M\| = \|S\| + \|A \setminus S\| = \|A\| = m$.

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Korollar 3.34 *Jeder k-reguläre, bipartite Graph G enthält ein perfektes Matching und hat den chromatischen Index $\chi'(G) = k$.*

Beweis: Wir beweisen beide Aussagen einzeln.

1. Es sei $G = (A \uplus B, E)$ ein k-regulärer, bipartiter Graph. Dann gibt es $k \cdot \|A\| = \|E\|$ Kanten, die von A nach B verlaufen. Andererseits verlaufen auch $\|E\| = k \cdot \|B\|$ Kanten von B nach A. Mithin gilt $\|A\| = \|B\|$. Jedes Matching M der Kardinalität $\|M\| = \|A\|$ ist somit ein perfektes Matching. Es sei $X \subseteq A$. Dann gibt es $k \cdot \|X\|$ Kanten, die in die Nachbarschaft $N(X)$ führen. Jeder Knoten $v \in N(X)$ ist adjazent zu höchstens k Knoten in X. Somit gilt $k \cdot \|X\| \leq k \cdot \|N(X)\|$ bzw. $\|X\| \leq \|N(X)\|$. Nach Theorem 3.33 gibt es somit ein perfektes Matching in G.

2. Der Nachweis erfolgt über Induktion über k und ist eine Übungsaufgabe.

Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Algebraische Strukturen 4

4.1 Grundbegriffe

Definition 4.1 *Eine (universelle)* Algebra $\langle S, f_1, \ldots, f_t \rangle$ *besteht aus einer nichtleeren Menge S und Operatoren $f_1, \ldots, f_t$ der Stelligkeiten $m_1, \ldots, m_t \in \mathbb{N}$, d.h. der Operator f_i ist eine Abbildung $f_i : S^{m_i} \to S$. Das Tupel $(m_1, \ldots, m_t)$ heißt* Signatur *der Algebra.*

Beispiele: Im Folgenden werden Beispiele zum Begriff der Algebra diskutiert.

1. Die *boolesche Algebra* $\langle \{\mathsf{w}, \mathsf{f}\}, \vee, \wedge, \neg \rangle$ besteht aus der Menge der Wahrheitswerte w und f mit den wie folgt beschriebenen Operatoren:

$\vee$	f	w
f	f	w
w	w	w

$\wedge$	f	w
f	f	f
w	f	w

   $\neg\mathsf{f} =_{\text{def}} \mathsf{w}$
   $\neg\mathsf{w} =_{\text{def}} \mathsf{f}$

   Die Signatur der Algebra ist somit $(2, 2, 1)$.
2. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ und $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ sind Algebren.
3. Für die Menge $S =_{\text{def}} \{\ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist eine Quadratzahl } \} \subseteq \mathbb{N}$ ist $\langle S, \cdot \rangle$ eine Algebra. $\langle S, + \rangle$ ist dagegen keine Algebra.
4. Es seien Σ ein endliches Alphabet und Σ^* die Menge aller endlichen Wörter über Σ. Der zweistellige Operator $\circ : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ ist die Konkatenation zweier Wörter x und y, d.h. $x \circ y = xy$, wobei y an x angehängt wird. Dann ist $\langle \Sigma^*, \circ \rangle$ eine Algebra.
5. Es seien U eine beliebige, nichtleere Menge, $F(U) =_{\text{def}} \{\ f \mid f : U \to U\ \}$ und $\circ$ die Hintereinanderausführung von Funktionen, d.h. $f \circ g : U \to U$ ist definiert durch $(f \circ g)(x) =_{\text{def}} f(g(x))$ für alle $x \in U$. Dann ist $\langle F(U), \circ \rangle$ eine Algebra.

Für die Stelligkeiten von Operatoren haben sich gewisse Namen eingebürgert:

- Nullstellige Operatoren sind Konstanten, z.B. $0, 42$ und $\bot$.
- Einstellige Operatoren heißen *unär*, z.B. $x \mapsto 2^x$, $x \mapsto \neg x$ und $A \mapsto \mathcal{P}(A)$.
- Zweistellige Operatoren heißen *binär* (oder *Verknüpfungen*), z.B. $(x, y) \mapsto \max\{x, y\}$ und $(x, y) \mapsto \text{ggT}(x, y)$. Verknüpfungen werden häufig durch die Infix-Notation statt der Funktionsschreibweise angegeben, z.B. $x + y$ statt $+(x, y)$.

- Dreistellige Operatoren heißen *ternär*, z.B. $(x, y, z) \mapsto$ `if` x `then` y `else` z und $(x, y, z) \mapsto 2 \cdot (xy + xz + yz)$.

Definition 4.2 *Es sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Algebra mit binärer Verknüpfung $\circ$. Ein Element $e \in S$ heißt*

1. linksneutral $\iff_{\text{def}}$ $(\forall a \in S)[e \circ a = a]$
2. rechtsneutral $\iff_{\text{def}}$ $(\forall a \in S)[a \circ e = a]$
3. neutral $\iff_{\text{def}}$ *e ist linksneutral und rechtsneutral*

Beispiele:

1. $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ besitzt 1 als neutrales Element, denn es gilt sowohl $1 \cdot n = n$ als auch $n \cdot 1 = n$.
2. $\langle \mathbb{N}_+, + \rangle$ besitzt kein neutrales Element.
3. Wir betrachten die Algebra $\langle \{a, b\}, \circ \rangle$ mit der wie folgt definierten Verknüpfung $\circ$:

$\circ$	a	b
a	a	b
b	a	b

   Dann gilt sowohl $a \circ a = a$ und $a \circ b = b$ als auch $b \circ a = a$ und $b \circ b = b$. Somit sind a und b linksneutrale Elemente. Andererseits sind weder a noch b rechtsneutral, denn es gilt $a \circ b = b$ und $b \circ a = a$.

Proposition 4.3 *Es sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Algebra mit der binären Verknüpfung $\circ$. Sind $c \in S$ linksneutral und $d \in S$ rechtsneutral, so gilt $c = d$.*

Beweis: Da c linksneutral ist, gilt insbesondere $c \circ d = d$. Da d rechtsneutral ist, gilt insbesondere $c = c \circ d$. Somit gilt $c = c \circ d = d$. Damit ist die Proposition bewiesen. ∎

Eine einfache Folgerung aus dieser Proposition ist das folgende Korollar.

Korollar 4.4 *Jede Algebra $\langle S, \circ \rangle$ mit binäre Verknüpfung $\circ$ besitzt höchstens ein neutrales Element.*

Beweis: Sind c und d zwei neutrale Elemente von $\langle S, \circ \rangle$, so ist insbesondere c linksneutral und d rechtsneutral. Mithin gilt $c = d$. Damit ist das Korollar bewiesen. ∎

Beispiele: Wir geben die neutralen Elemente weiterer Algebren an.

1. In $\langle \Sigma^*, \circ \rangle$ ist das leere Wort ε das neutrale Element.

2. In $\langle F(U), \circ \rangle$ ist die Identitätsfunktion $\mathrm{id}_U : U \to U : x \mapsto x$ neutrales Element.

Definition 4.5 *Es sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Algebra mit binärer Verknüpfung $\circ$ und neutralem Element $e \in S$. Weiterhin seien $a, x \in S$ beliebig. Dann heißt x*

1. linksinvers *zu* a $\quad \Longleftrightarrow_{\text{def}} \quad x \circ a = e$
2. rechtsinvers *zu* a $\quad \Longleftrightarrow_{\text{def}} \quad a \circ x = e$
3. Inverses *von* a $\quad \Longleftrightarrow_{\text{def}} \quad$ *x ist linksinvers und rechtsinvers zu a*

Beispiele:

1. In $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ist $-x$ das Inverse von $x \in \mathbb{Z}$.
2. In $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$ ist $1/x$ das Inverse von $x \neq 0$.
3. In $\langle \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ besitzen nur -1 und 1 ein Inverses.
4. Wir betrachten die Algebra $\langle \{e, a, b\}, \circ \rangle$ mit den paarweise verschiedenen Elementen e, a, b und der wie folgt gegebenen Verknüpfung $\circ$:

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	e
b	b	e	e

Aus der Tabelle kann man ablesen, dass e das neutrale Element ist. Weiterhin ist zu sehen, dass $a \circ a = a \circ b = b \circ a = b \circ b = e$ gilt. Mithin sind a und b invers zu a aber auch invers zu b.

Das letzte Beispiel macht deutlich, dass im Allgemeinen in einer Algebra die Elemente mehrere Inverse besitzen können. In Algebren mit assoziativer Verknüpfung ist dies nicht möglich. Es sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Algebra mit binärer Verknüpfung $\circ$. Dann heißt $\circ$ *assoziativ*, falls für alle $x, y, z \in S$ gilt:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

Proposition 4.6 *Es sei $\langle S, \circ \rangle$ eine Algebra mit assoziativer Verknüpfung $\circ$ und neutralem Element e. Weiterhin seien $a, x, y \in S$ beliebig. Sind x linksinvers zu a und y rechtsinvers zu a, so gilt $x = y$.*

Beweis: Da e ein neutrales Element ist, gilt insbesondere $x = x \circ e$ und $y = e \circ y$. Somit ergibt sich mit Hilfe der Assoziativität:

$$x = x \circ e = x \circ (a \circ y) = (x \circ a) \circ y = e \circ y = y$$

Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Korollar 4.7 *Jedes Element $a \in S$ einer Algebra $\langle S, \circ\rangle$ mit assoziativer Verknüpfung $\circ$ und neutralem Element e besitzt höchstens ein Inverses.*

Beispiele: Wir geben die inversen Elemente für weitere Algebren an, soweit sie existieren.

1. In $\langle \Sigma^*, \circ\rangle$ besitzt nur ε ein Inverses.
2. In $\langle F(U), \circ\rangle$ besitzen genau die bijektiven Funktionen f ein Inverses.

Definition 4.8 *Es sei $\langle S, f_1, \ldots, f_t\rangle$ eine Algebra mit Signatur $(m_1, \ldots, m_t)$. Eine nichtleere Teilmenge $S' \subseteq S$ erzeugt eine* Unteralgebra*, falls S' abgeschlossen ist unter $f_1, \ldots, f_t$, d.h., für alle $i \in \{1, \ldots, t\}$ und alle $a_1, \ldots, a_{m_i} \in S'$ gilt $f_i(a_1, \ldots, a_{m_i}) \in S'$.*

Beispiele:

1. $\langle \mathbb{N}, +\rangle$ ist eine Unteralgebra von $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$.
2. Es seien $S =_{\text{def}} \{\ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade }\}$ und $S' =_{\text{def}} \mathbb{N} \setminus S$. Dann sind $\langle S, +\rangle$ und $\langle S, \cdot\rangle$ Unteralgebren von $\langle \mathbb{N}, +\rangle$ bzw. $\langle \mathbb{N}, \cdot\rangle$. Außerdem ist auch $\langle S', \cdot\rangle$ eine Unteralgebra von $\langle \mathbb{N}, \cdot\rangle$; $\langle S', +\rangle$ ist dagegen keine Unteralgebra von $\langle \mathbb{N}, +\rangle$.

Im Folgenden führen wir Morphismen ein. Morphismen sind Abbildungen zwischen Algebren, die in einem gewissen Sinne verträglich mit den Operatoren sind.

Beispiele: Auf der Menge $\mathbb{Z}_k =_{\text{def}} \{0, 1, \ldots, k-1\}$ definieren wir die Multiplikation $\cdot_k$ modulo k:

$$x \cdot_k y =_{\text{def}} \text{mod}(x \cdot y, k)$$

Dann ist $\langle \mathbb{Z}_k, \cdot_k\rangle$ für alle $k \in \mathbb{N}_+$ eine Algebra. Wenn wir nun die beiden Algebren $\langle \mathbb{Z}_2, \cdot_2\rangle$ und $\langle \{\mathsf{w}, \mathsf{f}\}, \wedge\rangle$ und insbesondere die Verknüpfungen

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\wedge$	f	w
f	f	f
w	f	w

vergleichen, so sind die beiden Algebren sehr ähnlich. Der Unterschied liegt lediglich in der Benennung der Elemente und Operatoren. Später werden wir solche Algebren *isomorph* nennen.

Definition 4.9 *Es seien $A = \langle S, f_1, \ldots, f_t\rangle$ und $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_t\rangle$ zwei Algebren mit gleicher Signatur $(m_1, \ldots, m_t)$. Eine Abbildung $h : S \to \tilde{S}$ heißt* Homomorphismus *von A nach $\tilde{A}$, falls für alle $i \in \{1, \ldots, t\}$ und alle $a_1, \ldots, a_{m_i} \in S$ gilt:*

$$\tilde{f}_i(h(a_1), \ldots, h(a_{m_i})) = h(f_i(a_1, \ldots, a_{m_i})),$$

d.h., f_i und $\tilde{f}_i$ sind mit h vertauschbar.

Beispiele: Wir demonstrieren das Konzept von Homomorphismen für einige Algebren.

1. Für die Algebren $A =_{\text{def}} \langle \mathbb{N}, +\rangle$ und $\tilde{A} =_{\text{def}} \langle \mathbb{Z}, +\rangle$ ist die Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \mapsto n$ ein Homomorphismus von A nach $\tilde{A}$, denn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt
$$h(n) + h(m) = n + m = h(n + m).$$

2. Für $A =_{\text{def}} \langle \mathbb{N}, +\rangle$ und $\tilde{A} =_{\text{def}} \langle \mathbb{Z}_k, +_k\rangle$ mit $+_k : (x, y) \mapsto \text{mod}(x + y, k)$ ist die Abbildung $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_k : n \mapsto \text{mod}(n, k)$ ein Homorphismus von A nach $\tilde{A}$, denn wegen der Rechenregeln der Modularen Arithmetik gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} h(n) +_k h(m) &= \text{mod}(h(n) + h(m), k) \\ &= \text{mod}(\text{mod}(n, k) + \text{mod}(m, k), k) \\ &= \text{mod}(n + m, k) \\ &= h(n + m) \end{aligned}$$

3. Für die Algebren $A =_{\text{def}} \langle \Sigma^*, \circ\rangle$ mit der Konkatenation $\circ$ als Verknüpfung und $\tilde{A} =_{\text{def}} \langle \mathbb{N}, +\rangle$ ist die Abbildung $h : \Sigma^* \to \mathbb{N} : x \mapsto |x|$ (wobei $|x|$ die Länge von x bezeichnet) ein Homomorphismus, denn es gilt für alle Wörter $x, y \in \Sigma^*$
$$h(x) + h(y) = |x| + |y| = |x \circ y| = h(x \circ y).$$

Proposition 4.10 *Es sei $h : S \to \tilde{S}$ ein Homomorphismus von $A = \langle S, f_1, \ldots, f_t\rangle$ nach $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_t\rangle$. Dann ist $\langle h(S), \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_t\rangle$ eine Unteralgebra von $\tilde{A}$.*

Beweis: Wir müssen die Abgeschlossenheit der Menge $h(S)$ unter $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_t$ zeigen, d.h., für jeden Operator $\tilde{f}_i$ (der Stelligkeit m_i) muss für alle $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{m_i} \in h(S)$ wiederum $\tilde{f}_i(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{m_i}) \in h(S)$ gelten. Es sei $\tilde{a}_j \in h(S)$, d.h., es gibt ein $a_j \in S$ mit $h(a_j) = \tilde{a}_j$. Somit gilt:

$$\tilde{f}_i(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{m_i}) = \tilde{f}_i(h(a_1), \ldots, h(a_{m_i})) = h(f_i(a_1, \ldots, a_{m_i})) \in h(S)$$

Damit ist die Proposition bewiesen. ∎

Definition 4.11 *Es seien $A = \langle S, f_1, \ldots, f_t\rangle$ und $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_t\rangle$ zwei Algebren mit gleicher Signatur.*

1. *Eine Algebra $h : S \to \tilde{S}$ heißt (Algebra-)*Isomorphismus *von A nach $\tilde{A}$, falls h bijektiv und ein Homomorphismus von A nach $\tilde{A}$ ist.*
2. *A und $\tilde{A}$ heißen* isomorph *(symbolisch: $A \simeq \tilde{A}$), falls ein Isomorphismus von A nach $\tilde{A}$ existiert.*
3. *Gilt $A = \tilde{A}$, so heißt ein Isomorphismus von A nach A* Automorphismus *auf A.*

Beispiele:

1. Für $A =_{\text{def}} \langle \mathbb{N}, +\rangle$ und $\tilde{A} =_{\text{def}} \langle \{\ 2n \mid n \in \mathbb{N}\ \}, +\rangle$ ist $h : n \mapsto 2n$ ein Isomorphismus von A nach $\tilde{A}$.
2. Für $A =_{\text{def}} \langle \mathbb{R}_{>0}, \cdot\rangle$ und $\tilde{A} =_{\text{def}} \langle \mathbb{R}, +\rangle$ ist $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$ (wegen $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$) ein Isomorphismus von A nach $\tilde{A}$.
3. Auf $A =_{\text{def}} \langle \mathbb{Z}_3, +_3\rangle$ ist durch die Abbildung
$$h : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3 : n \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ 2, & \text{falls } n = 1 \\ 1, & \text{falls } n = 2 \end{cases}$$
ein Automorphismus gegeben.
4. Auf $A =_{\text{def}} \langle \mathbb{Z}_5^*, +_5\rangle$ mit $\mathbb{Z}_5^* =_{\text{def}} \{1, 2, 3, 4\}$ ist durch die Abbildung
$$h : \mathbb{Z}_5^* \to \mathbb{Z}_5^* : n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ 3, & \text{falls } n = 2 \\ 2, & \text{falls } n = 3 \\ 4, & \text{falls } n = 4 \end{cases}$$
ein Automorphismus gegeben.

Proposition 4.12 *Ein Isomorphismus h von $A = \langle S, \circ\rangle$ nach $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\circ}\rangle$ bildet neutrale Elemente auf neutrale Elemente und inverse Elemente auf inverse Elemente ab.*

Beweis: (*nur für Rechtsneutralität*) Es sei $e \in S$ rechtsneutral für $\circ$. Dann gilt für $b \in \tilde{S}$
$$b \,\tilde{\circ}\, h(e) = h(h^{-1}(b)) \,\tilde{\circ}\, h(e) = h(h^{-1}(b) \circ e) = h(h^{-1}(b)) = b.$$
Somit ist $h(e)$ ein rechtsneutrales Element von $\tilde{A}$.

Analoge Argumentationen können für linksneutrale, neutrale, rechtsinverse, linksinverse, inverse Elemente geführt werden. Damit ist die Proposition bewiesen. ∎

Proposition 4.13 *Gibt es einen Isomorphismus h von $A = \langle S, \circ\rangle$ nach $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\circ}\rangle$, so gibt es einen Isomorphismus $\tilde{h}$ von $\tilde{A} = \langle \tilde{S}, \tilde{\circ}\rangle$ nach $A = \langle S, \circ\rangle$.*

Beweis: Wir definieren $\tilde{h} =_{\text{def}} h^{-1}$. Da $h : S \to \tilde{S}$ bijektiv ist, gibt es $\tilde{h} : \tilde{S} \to S$ stets und $\tilde{h}$ ist ebenfalls bijektiv. Weiterhin gilt für $a, b \in \tilde{S}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(a \mathbin{\tilde{\circ}} b) &= \tilde{h}(h(h^{-1}(a)) \mathbin{\tilde{\circ}} h(h^{-1}(b))) \\
&= \tilde{h}(h(h^{-1}(a) \circ h^{-1}(b))) \\
&= h^{-1}(h(h^{-1}(a) \circ h^{-1}(b))) \\
&= h^{-1}(a) \circ h^{-1}(b) \\
&= \tilde{h}(a) \circ \tilde{h}(b)
\end{aligned}$$

Somit ist $\tilde{h}$ ein Homomorphismus und mithin ein Isomorphismus. Damit ist die Proposition bewiesen. ■

4.2 Algebratypen

Wir betrachten die folgenden drei Eigenschaften für eine Algebra $A = \langle S, \circ \rangle$:

(E1) : Die Verknüpfungen $\circ$ ist assoziativ.

(E2) : Es gibt ein neutrales Element $e \in S$.

(E3) : Jedes Element $a \in S$ besitzt ein eindeutiges inverses Element.

Natürlich kann für eine Algebra die Eigenschaft (E3) nur gelten, wenn auch (E2) gilt.

Definition 4.14 *Es sei $A = \langle S, \circ \rangle$ eine Algebra mit binärer Verknüpfung $\circ$. Dann wird A einer der folgenden Namen zugewiesen, ja nachdem welche der Eigenschaften* (E1), (E2) *oder* (E3) *gelten:*

Name	(E1)	(E2)	(E3)
Gruppoid			
Halbgruppe	X		
Monoid	X	X	
Gruppe	X	X	X
Loop		X	X
Gruppoid mit 1		X	

Definition 4.15 *Ein Gruppoid $\langle S, \circ \rangle$ heißt* abelsch*, falls $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in S$ gilt, d.h., $\circ$ ist kommutativ.*

Beispiele:

1. Die Algebra $A =_{\text{def}} \langle \{a, b\}, \circ \rangle$ mit dem durch die Verknüpfungstabelle

$\circ$	a	b
a	b	a
b	b	b

   gegebenen Operator $\circ$ ist lediglich ein nicht-abelscher Gruppoid, denn $\circ$ ist nicht assoziativ (wegen $(a \circ b) \circ a = a \circ a = b$ und $a \circ (b \circ a) = a \circ b = a$) und A besitzt kein neutrales Element (b ist zwar rechtsneutral aber nicht linksneutral; a ist weder rechts- noch linksneutral). Die Kommutativität gilt ebenfalls nicht für $\circ$ (wegen $a \circ b \neq b \circ a$).
2. $\langle \mathbb{N}_+, + \rangle$ ist eine abelsche Halbgruppe, aber kein Monoid.
3. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ ist ein abelscher Monoid, aber keine Gruppe.

4. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ist eine abelsche Gruppe.

5. $\langle \mathbb{Z}, - \rangle$ ist ein nicht-abelscher Gruppoid.

6. $\langle \Sigma^*, \circ \rangle$ ist ein nicht-abelscher Monoid.

7. Die Algebra $A =_{\text{def}} \langle \{e, a, b\}, \circ \rangle$ mit dem durch die Verknüpfungstabelle

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b	b	e

gegebenen Operator $\circ$ ist ein abelscher Loop, denn $\circ$ ist nicht assoziativ (wegen $a \circ (b \circ b) = a \circ e = a$ und $(a \circ b) \circ b = b \circ b = e$), e ist das neutrale Element und jedes Element ist zu sich selbstinvers. Die Kommutativität von $\circ$ folgt aus der Symmetrie der Verknüpfungstabelle entlang der Diagonale von links oben nach rechts unten.

Definition 4.16 *Eine Algebra $A = \langle S, +, \cdot \rangle$ der Signatur $(2, 2)$ heißt* Ring*, falls folgende Bedingungen gelten:*

1. *$\langle S, + \rangle$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in S$.*

2. *$\langle S, \cdot \rangle$ ist ein Monoid mit neutralem Element $1 \in S$.*

3. *Für alle $a, b, c \in S$ gilt:*

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (b + c) \cdot a &= (b \cdot a) + (c \cdot a) \end{aligned}$$

D.h., $+$ und $\cdot$ sind distributiv.

Beispiele:

1. $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ ist ein Ring.

2. $\langle \{\mathsf{w}, \mathsf{f}\}, \oplus, \wedge \rangle$ ist ein Ring.

3. $\langle \{\mathsf{w}, \mathsf{f}\}, \oplus, \vee \rangle$ ist kein Ring, denn die Distributivität gilt nicht.

4. Die univariaten ganzzahligen Polynome bilden einen Ring.

Definition 4.17 *Eine Algebra $A = \langle S, +, \cdot \rangle$ der Signatur $(2,2)$ heißt* Körper*, falls folgende Bedingungen gelten:*

1. *$\langle S, + \rangle$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in S$.*
2. *$\langle S \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $1 \in S$.*
3. *Für alle $a, b, c \in S$ gilt*

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (b + c) \cdot a &= (b \cdot a) + (c \cdot a) \end{aligned}$$

D.h., $+$ und $\cdot$ sind distributiv.

Beispiele:

1. $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ ist kein Körper.
2. $\langle \{\mathsf{w}, \mathsf{f}\}, \oplus, \wedge \rangle$ ist ein Körper.
3. Die univariaten ganzzahligen Polynome bilden keinen Körper, denn es gibt kein ganzzahliges Polynom $p(x)$ mit $x \cdot p(x) = 1$.
4. $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ und $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ sind Körper.

Definition 4.18 *Eine Algebra $A = \langle S, +, \cdot, \overline{\ } \rangle$ der Signatur $(2,2,1)$ heißt* boolesche Algebra*, falls folgende Bedingungen gelten:*

1. *$\langle S, + \rangle$ ist ein abelscher Monoid mit neutralem Element $0 \in S$.*
2. *$\langle S, \cdot \rangle$ ist ein abelscher Monoid mit neutralem Element $1 \in S$.*
3. *Für alle $a \in S$ gilt $a + \overline{a} = 1$ und $a \cdot \overline{a} = 0$.*
4. *Für alle $a, b, c \in S$ gilt:*

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ a + (b \cdot c) &= (a + b) \cdot (a + c) \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $\langle \{\mathsf{w}, \mathsf{f}\}, \vee, \wedge, \neg \rangle$ ist eine boolesche Algebra.
2. $\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{\ } \rangle$ ist eine boolesche Algebra (für beliebiges A).

4.3 Gruppen

Zur Erinnerung: Eine Gruppe $\langle G, \circ \rangle$ ist ein Gruppoid mit den folgenden Eigenschaften:

(G1) Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ auf G.

(G2) Es gibt ein neutrales Element $e \in G$.

(G3) Für jedes Element $a \in G$ gibt es ein Inverses $a^{-1} \in G$.

Im Folgenden werden wir eine Gruppe $\langle G, \circ \rangle$ mit der Trägermenge G identifizieren.

Theorem 4.19 *Es seien G eine Gruppe, $a, b, c \in G$ und $x, y \in G$. Dann gilt:*

1. Involutionsregel:

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

2. Kürzungsregeln:

$$\begin{aligned} a \circ b = c \circ b &\iff a = c \\ b \circ a = b \circ c &\iff a = c \end{aligned}$$

3. Eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned} a \circ x = b &\iff x = a^{-1} \circ b \\ x \circ a = b &\iff x = b \circ a^{-1} \end{aligned}$$

Beweis: (*Involutionsregel*) Wir definieren $b =_{\text{def}} (a^{-1})^{-1}$, d.h., b ist das inverse Element von a^{-1} in G. Dann gilt

$$b = b \circ e = b \circ (a^{-1} \circ a) = (b \circ a^{-1}) \circ a = e \circ a = a$$

Die anderen Regeln sind ähnlich zu beweisen. Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Wir führen einige Schreibweisen ein für eine Gruppe G, $a \in G$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a^0 &=_{\text{def}} e \\ a^n &=_{\text{def}} a \circ a^{n-1} \qquad \text{für } n \geq 1 \\ a^{-n} &=_{\text{def}} (a^{-1})^n \end{aligned}$$

Hierbei heißt a^n die *n-te Potenz von a*. Zu beachten ist, dass a^{-n} wohldefiniert ist:

$$(a^{-1})^n = (a^{-1})^n \circ \left(a^n \circ (a^n)^{-1}\right) = \left((a^{-1})^n \circ a^n\right) \circ (a^n)^{-1} = e \circ (a^n)^{-1} = (a^n)^{-1}$$

Im Allgemeinen gelten folgende Rechenregeln für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a \in G$:

$$\begin{aligned} a^m \circ a^n &= a^{m+n} \\ (a^n)^m &= a^{m \cdot n} \\ a^m = a^n &\iff a^{m-n} = e \end{aligned}$$

Definition 4.20 *Es seien G eine Gruppe und $a \in G$. Die* Ordnung $\text{ord}(a)$ *von a ist die kleinste Zahl $r \in \mathbb{N}_+$ mit $a^r = e$. Falls kein solches r existiert, dann definieren wir* $\text{ord}(a) =_{\text{def}} \infty$.

Beispiele:

1. In $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ gilt $\text{ord}(0) = 1$ und $\text{ord}(n) = \infty$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
2. In $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$ sind die Ordnungen für die Elemente der folgenden Tabelle zu entnehmen:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\text{ord}(a)$	1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12

Proposition 4.21 *Es sei G eine endliche Gruppe. Dann hat jedes Element in G eine endliche Ordnung.*

Beweis: Es sei $a \in G$. Dann sind alle Elemente $a^0, a^1, \ldots, a^{\|G\|}$ ebenfalls Elemente von G. Da G nur $\|G\|$ Elemente enthält, sind unter diesen $\|G\| + 1$ Elementen mindestens zwei gleiche Elemente a^k und a^j mit $k \neq j$. Wir wählen k minimal mit $a^k = a^j$ für $0 \leq j \leq k-1$. Es gilt $a^{k-j} = e$. Da k minimal ist, muss $j = 0$ gelten. Mithin gilt $a^k = e$ und somit $\text{ord}(a) = k$. Damit ist die Proposition bewiesen. ∎

Lemma 4.22 *Es seien G eine Gruppe und $a \in G$ mit $\text{ord}(a) < \infty$. Dann gilt:*

$$a^k = e \iff \text{ord}(a) | k$$

Beweis: Wir zeigen beide Richtungen einzeln.

($\Rightarrow$) Mit $k = s \cdot \text{ord}(a) + r$ für $r, s \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq r < \text{ord}(a)$ folgt:

$$e = a^k = a^{s \cdot \text{ord}(a) + r} = (a^{\text{ord}(a)})^s \circ a^r = e^s \circ a^r = e \circ a^r = a^r$$

Wegen $r < \text{ord}(a)$ gilt $r = 0$. Somit gilt $k = s \cdot \text{ord}(a)$ bzw. $\text{ord}(a) | k$.

($\Leftarrow$) Mit $k = s \cdot \text{ord}(a)$ gilt $a^k = (a^{\text{ord}(a)})^s = e^s = e$.

Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Lemma 4.23 *Es sei G eine abelsche Gruppe. Es seien $a, b \in G$ Elemente endlicher, teilerfremder Ordnung, d.h., $\text{ord}(a), \text{ord}(b) < \infty$ und $\text{ggT}(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = 1$. Dann gilt:*

$$\text{ord}(a \circ b) = \text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b)$$

Beweis: Da G abelsch ist, gilt:

$$(a \circ b)^{\text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b)} = (a^{\text{ord}(a)})^{\text{ord}(b)} \circ (b^{\text{ord}(b)})^{\text{ord}(a)} = e^{\text{ord}(b)} \circ e^{\text{ord}(a)} = e$$

Nach Lemma 4.22 gilt mithin $\text{ord}(a \circ b) | \text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b)$.

Angenommen $\text{ord}(a \circ b) < \text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b)$. Dann gibt es eine Primzahl $p \geq 2$ mit

$$\text{ord}(a \circ b) \;\Big|\; \frac{\text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b)}{p}.$$

Da $\text{ord}(a)$ und $\text{ord}(b)$ teilerfremd sind, kann p nur eine der beiden Ordnungen teilen. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gelte $p \mid \text{ord}(a)$. Somit folgt

$$e = (a \circ b)^{\frac{\text{ord}(a)\cdot\text{ord}(b)}{p}} = a^{\frac{\text{ord}(a)\cdot\text{ord}(b)}{p}} \circ \left(b^{\text{ord}(b)}\right)^{\frac{\text{ord}(a)}{p}} = a^{\frac{\text{ord}(a)\cdot\text{ord}(b)}{p}}$$

und mithin gilt nach Lemma 4.22 auch

$$\text{ord}(a) \;\Big|\; \frac{\text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b)}{p}$$

Wegen $p \nmid \text{ord}(b)$ folgt:

$$\text{ord}(a) \;\Big|\; \frac{\text{ord}(a)}{p}$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch. Somit gilt $\text{ord}(a \circ b) = \text{ord}(a) \cdot \text{ord}(b)$ und das Lemma ist bewiesen. ∎

Lemma 4.24 *Es seien G eine endliche, abelsche Gruppe und $a \in G$ ein Element maximaler Ordnung, d.h.* $\text{ord}(a) = \max\{\text{ord}(b) | b \in G\}$. *Dann gilt* $\text{ord}(b) | \text{ord}(a)$ *für alle* $b \in G$.

Beweis: Zum Beweis mittels Widerspruch nehmen wir an, dass b ein Element in G mit $\text{ord}(b) \nmid \text{ord}(a)$ ist. Dann gibt es eine Primzahl $p \geq 2$ mit:

$$p^i \mid \text{ord}(a), \qquad p^{i+1} \nmid \text{ord}(a), \qquad p^{i+1} \mid \text{ord}(b)$$

Wir definieren $a' =_{\text{def}} a^{p^i}$ und $b' =_{\text{def}} b^{\frac{\text{ord}(b)}{p^{i+1}}}$ und bestimmen die Ordnungen von a' und b':

$$\text{ord}(a') = \frac{\text{ord}(a)}{p^i}, \qquad \text{denn} \quad (a')^{\frac{\text{ord}(a)}{p^i}} = \left(a^{p^i}\right)^{\frac{\text{ord}(a)}{p^i}} = a^{\text{ord}(a)} = e$$

$$\text{ord}(b') = p^{i+1}, \qquad \text{denn} \quad (b')^{p^{i+1}} = \left(b^{\frac{\text{ord}(b)}{p^{i+1}}}\right)^{p^{i+1}} = b^{\text{ord}(b)} = e$$

Da $p^{i+1} \nmid \text{ord}(a)$ sind $\dfrac{\text{ord}(a)}{p^i}$ und p^{i+1} teilerfremd. Somit folgt aus Lemma 4.23

$$\text{ord}(a' \circ b') = \text{ord}(a') \cdot \text{ord}(b') = p \cdot \text{ord}(a) > \text{ord}(a).$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Maximalität der Ordnung von a und das Lemma ist bewiesen. ∎

Definition 4.25 *Eine Unteralgebra $\langle H, \circ\rangle$ einer Gruppe $\langle G, \circ\rangle$ heißt* Untergruppe *von G, falls $\langle H, \circ\rangle$ eine Gruppe ist.*

Proposition 4.26 *Es seien G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann sind die neutralen Elemente von G und H identisch.*

Beweis: Es seien e_H ein neutrales Element von H und e_G ein neutrales Element von G. Es gilt $e_H \circ e_H = e_H$ und $e_G \circ e_H = e_H$, d.h., $e_H \circ e_H = e_G \circ e_H$. Nach der Kürzungsregel für G gilt $e_H = e_G$. ■

Proposition 4.27 *Jede Unteralgebra einer endlichen Gruppe ist eine Untergruppe.*

Beweis: Es sei $\langle H, \circ \rangle$ ein Unteralgebra der endlichen Gruppe $\langle G, \circ \rangle$. Die Assoziativität überträgt sich von H auf G. Für die Existenz des neutralen Elementes und der inversen Elemente sei $b \in H$. Da H abgeschlossen ist unter $\circ$, gilt $b^n \in H$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 4.21 hat b eine endliche Ordnung in G. Definiere $m =_{\text{def}} \text{ord}(b)$. Dann gilt $e = b^m \in H$ und $e = b \circ b^{m-1}$. Somit gehört das neutrale Element e zu H und b^{m-1} ist das inverse Element zu b. ■

Korollar 4.28 *Ist G eine endliche Gruppe und sind H und K Untergruppen von G, so ist $H \cap K$ eine Untergruppe von G.*

Beweis: $H \cap K$ ist abgeschlossen unter den Gruppenoperationen. ■

Korollar 4.29 *Es seien G eine endliche Gruppe und $a \in G$ ein beliebiges Element. Dann ist $S_a =_{\text{def}} \left\{e, a, a^2, \ldots, a^{\text{ord}(a)-1}\right\}$ die kleinste Untergruppe von G, die a enthält.*

Beweis: S_a ist abgeschlossen unter den Gruppenoperationen. Jede Unteralgebra, die a enthält, muss auch a^n für $n \in \mathbb{N}$ enthalten. ■

Definition 4.30 *Eine Gruppe G heißt* zyklisch*, falls es ein $b \in G$ gibt mit $G = \{b^i | i \in \mathbb{Z}\}$. Das Element b heißt* erzeugendes Element *(bzw.* Generator*) von G.*

Beispiele:

1. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ist zyklisch mit 1 als erzeugendem Element.
2. $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$ ist zyklisch mit 1 als erzeugendem Element.

Korollar 4.31 *Für eine endliche, zyklische Gruppe G mit dem Generator $b \in G$ gilt $\|G\| = \text{ord}(b)$.*

Theorem 4.32 *Es sei G eine zyklische Gruppe.*

1. *Ist $\|G\| = \infty$, so ist G isomorph zu $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.*
2. *Ist $\|G\| = m < \infty$, so ist G isomorph zu $\langle \mathbb{Z}_m, +_m \rangle$.*

Beweis: (*nur endliche Gruppen*) Es sei G zyklisch mit erzeugendem Element b und endlich, d.h., $\|G\| = m$ für $m \in \mathbb{N}_+$. Somit ist $G = \{\ b^i \mid i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}\ \}$ mit $\mathrm{ord}(b) = m$. Wir definieren die folgende Abbildung:

$$h\ :\ \mathbb{Z}_m \to G\ :\ i \mapsto b^i$$

Dann ist h bijektiv (wegen $\|\mathbb{Z}_m\| = \|G\|$) und es gilt:

$$\begin{aligned} h(i) \circ h(j) &= b^i \circ b^j \\ &= b^{i+j} \\ &= b^{s \cdot m + \mathrm{mod}(i+j,m)} \\ &= e^s \circ b^{\mathrm{mod}(i+j,m)} \\ &= b^{\mathrm{mod}(i+j,m)} \\ &= b^{i +_m j} \\ &= h(i +_m j) \end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Beispiel: $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot_5 \rangle$ ist eine zyklische Gruppe mit erzeugendem Element 2:

$$\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\} = \{1, 2, 4, 3\}$$

Somit gilt $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot_5 \rangle \cong \langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ mittels der Abbildung:

$$0 \mapsto 1, \qquad 1 \mapsto 2, \qquad 2 \mapsto 4, \qquad 3 \mapsto 3$$

Die *eulersche Phi-Funktion* $\varphi : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ ist definiert als:

$$\varphi(n) =_{\mathrm{def}} \|\mathbb{Z}_n^*\|$$

Mit anderen Worten: $\varphi(n)$ ist die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen.

Lemma 4.33 *Es sei G eine endliche Gruppe mit $\|G\| = n$. Dann gilt $\mathrm{ord}(a) | n$ für alle Elemente $a \in G$.*

Theorem 4.34 (Euler) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und für alle $a \in \mathbb{Z}_n^*$ gilt*

$$\mathrm{mod}(a^{\varphi(n)}, n) = 1.$$

Beweis: Es sei $a \in \mathbb{Z}_n^*$ mit $k =_{\text{def}} \text{ord}(a)$. Nach Lemma 4.33 gilt $k|\varphi(n)$ und wir erhalten

$$\text{mod}(a^{\varphi(n)}, n) = \text{mod}(a^{k \cdot \frac{\varphi(n)}{k}}, n) = \text{mod}(1^{\frac{\varphi(n)}{k}}, n) = 1.$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Theorem 4.35 (Fermat) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:*

$$n \text{ ist eine Primzahl} \iff \text{mod}(a^{n-1}, n) = 1 \text{ für alle } a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$$

Beweis: Wir zeigen beide Richtungen einzeln.

(⇒) Es sei n eine Primzahl. Dann gilt $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ und $\varphi(n) = n - 1$. Nach Theorem 4.34 gilt somit $\text{mod}(a^{n-1}, n) = 1$ für alle $a \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$.

(⇐) Es sei $1 \leq p < n$ ein Teiler von n. Wir wollen zeigen, dass $p = 1$ gilt. Nach Voraussetzung gilt $\text{mod}(p^{n-1}, n) = 1$ und folglich $p^{n-1} - 1 = k \cdot n = k \cdot k' \cdot p$ für geeignete $k, k' \in \mathbb{Z}$. Damit p sowohl p^{n-1} als auch 1 teilt, muss $p = 1$ gelten. Somit besitzt n keine von 1 verschiedenen Teiler. Mithin ist n eine Primzahl.

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

4.4 Endliche Körper

Zur Erinnerung: Ein Körper $K = \langle K, +, \cdot \rangle$ ist eine Algebra mit:

(K1) $\langle K, + \rangle$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0, wobei inverse Elemente mit $-a$ für $a \in S$ bezeichnet werden.

(K2) $\langle K \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 1, wobei inverse Elemente mit a^{-1} für $a \in S \setminus \{0\}$ bezeichnet werden.

(K3) Es gelten die Distributivgesetze für alle $a, b, c \in K$:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (b + c) \cdot a &= (b \cdot a) + (c \cdot a) \end{aligned}$$

Wie im Falle von Gruppen identifizieren wir einen Körper mit seiner Trägermenge K.

Beispiele:

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (mit den üblichen Operationen) sind Körper.
2. $\langle \mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2 \rangle$ ist ein Körper.

3. $\langle \mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4 \rangle$ ist kein Körper, denn: $2 \cdot_4 2 = 0 \notin \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$

Proposition 4.36 *In jedem Körper K gilt für alle $a \in K$:*

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Beweis: Es sei $a \in K$. Aus den Distributivgesetzen erhalten wir:

$$0 + (a \cdot 0) = a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = (a \cdot 0) + (a \cdot 0)$$
$$0 + (0 \cdot a) = 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = (0 \cdot a) + (0 \cdot a)$$

Mit Hilfe der Kürzungsregeln für Gruppen folgt $0 = a \cdot 0 = 0 \cdot a$. Damit ist die Proposition bwiesen. ■

Proposition 4.37 *In jedem Körper K gilt für alle $a, b \in K$:*

$$a \cdot b = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0$$

(Wir sagen auch: Körper sind nullteilerfrei.)

Beweis: Es gelte $a \cdot b = 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- *1. Fall*: Es sei $a = 0$. Dann gilt die Aussage.
- *2. Fall*: Es sei $a \neq 0$. Dann gibt es ein multiplikatives Inverse $a^{-1} \in K \setminus \{0\}$. Somit gilt nach Voraussetzung und Proposition 4.36:

$$b = 1 \cdot b = a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

Damit ist die Proposition bewiesen. ■

Theorem 4.38 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:*

$$\langle \mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n \rangle \text{ ist ein Körper} \quad \Longleftrightarrow \quad n \text{ ist eine Primzahl}$$

Beweis: $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$ ist für alle $n \geq 2$ eine abelsche Gruppe; Distributivgesetze gelten offensichtlich. Wir müssen noch zeigen, wann $\langle \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot_n \rangle$ eine (abelsche) Gruppe ist.

($\Leftarrow$) Ist n eine Primzahl, so gilt $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$. Somit ist $\langle \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot_n \rangle$ eine Gruppe.

($\Rightarrow$) Wir zeigen die Kontraposition. Es sei n also keine Primzahl. Somit gibt es ein $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) > 1$, d.h., $a \notin \mathbb{Z}_n^*$. Es sei $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ minimal mit $\mathrm{ggT}(a, n) > 1$. Dann gilt $a | n$. Es gibt somit $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $a \cdot b = n$ bzw. $a \cdot_n b = 0$. Somit ist $\langle \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot_n \rangle$ kein Gruppoid, also auch keine Gruppe.

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Für einen Körper K bezeichnen wir mit $K^* =_{\text{def}} K \setminus \{0\}$ die *multiplikative Gruppe*.

Theorem 4.39 *In jedem endlichen Körper K ist die multiplikative Gruppe K^* zyklisch.*

Beweis: Mit K ist auch K^* endlich. Somit besitzt jedes Element von K^* eine endliche Ordnung in der Gruppe K^*. Es sei $a \in K^*$ ein Element maximaler Ordnung. Wir müssen zeigen, dass $\text{ord}(a) = \|K^*\|$ gilt. Dazu betrachten wir das Polynom

$$p(x) =_{\text{def}} x^{\text{ord}(a)} - 1.$$

Wir können nun wie folgt argumentieren:

1. Der Grad von p ist $\text{ord}(a)$.
2. Für alle $b \in K^*$ gilt $\text{ord}(b) | \text{ord}(a)$.
3. Für alle $b \in K^*$ gilt $b^{\text{ord}(a)} = 1$, d.h., alle $b \in K^*$ sind Nullstellen von p.
4. Ein Polynom vom Grad $\text{ord}(a)$ hat höchstens $\text{ord}(a)$ Nullstellen, d.h., $\text{ord}(a) \geq \|K^*\|$.

Damit folgt $\text{ord}(a) = \|K^*\|$ und das Theorem ist bewiesen. ■

Theorem 4.40 *Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gibt es genau dann einen Körper mit $\|K\| = n$ Elementen, wenn $n = p^k$ für eine geeignete Primzahl p sowie ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ gilt. Sind K_1 und K_2 endliche Körper mit $\|K_1\| = \|K_2\|$, so gilt $K_1 \cong K_2$.*

Der nach diesem Theorem (bis auf Isomorphie) eindeutige endliche Körper mit p^k Elementen heißt *Galoiskörper* und wird mit $\text{GF}(p^k)$ bezeichnet.

Beispiel: Wir wollen den GF(4) konstruieren. Wie wir bereits wissen, ist $\langle \mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4 \rangle$ kein Körper. Wir definieren also $K =_{\text{def}} \{0, 1, a, b\}$, wobei 0 das additive neutrale Element und 1 das multiplikative neutrale Element sind.

Zunächst legen wir die Multiplikation fest. Die zugehörige Verknüpfungstabelle erhalten wir durch Wahl von a als erzeugendes Element (mit $a^2 = b$ und $a^3 = 1$):

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Durch die Multiplikation ergibt sich eine Verknüpfungstabelle für die Addition:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

Die Einträge lassen sich wie folgt begründen:

- Die Einträge für das Nullelement 0 sind eindeutig festgelegt.
- Die Einträge für a ermitteln wir wie folgt:
  - $a + 1 \neq 1$, denn aus $a + 1 = 1$ folgt $a = 0$.
  - $a + 1 \neq a$, denn aus $a + 1 = a$ folgt $1 = 0$.
  - $a+1 \neq 0$, denn aus $a+1 = 0$ folgt $0 = a+a^3 = a\cdot(1+a^2) = a\cdot(1+b)$ (wegen der Distributivgesetze), d.h., $1 + b = 0$ (wegen der Nullteilerfreiheit) und folglich $1 + a = 1 + b$ bzw. $a = b$.

  Somit gilt $a + 1 = b$ und folglich $a + b = a + a^2 = a \cdot (1 + a) = a \cdot b = 1$.
- Die inversen Elemente werden eindeutig aufgeteilt.

Zahlentheorie* 5

In diesem Kapitel sollen Beispiele zur Verdeutlichung algeraischer Konzepte diskutiert werden.

5.1 Chinesischer Restsatz

Wir interessieren uns zunächst für die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen in $\mathbb{Z}_m$, also bezüglich der modularen Arithmetik.

Beispiele: Folgende Beispiele sollen verdeutlichen, dass mit modularen Artihmetik die Lösbarkeit einfacher Gleichungen komplizierter ist:

1. Jede Gleichung $ax = b$ mit $a \neq 0$ besitzt genau eine Lösung in $\mathbb{R}$.
2. Die Gleichung $2x \equiv 3 \pmod 6$ besitzt keine Lösung in $\mathbb{Z}_6$.
3. Die Gleichung $2x \equiv 4 \pmod 6$ besitzt zwei Lösungen in $\mathbb{Z}_6$; diese sind $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$.

Zur Analyse der Lösbarkeit von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen erweitern wir zunächst den bekannten Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen. Ausgangspunkt für den Algorithmus ist folgendes Lemma.

Lemma 5.1 *Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ und $m \nmid n$. Dann gilt:*

$$\mathrm{ggT}(m, n) = \mathrm{ggT}(n \bmod m, m)$$

Beweis: Wir zeigen: Jeder Teiler von m und n teilt auch $n \bmod m$ und m und umgekehrt.

Es sei zunächst d ein Teiler von m und n, d.h. $d \mid m$ und $d \mid n$. Es gilt $n = \ell \cdot m + (n \bmod m)$ bzw. $(n \bmod m) = n - \ell \cdot m$ für ein geeignetes $\ell \in \mathbb{N}$. Also gilt $d \mid n \bmod m$; $d \mid m$ sowieso.

Es sei nun andererseits d ein Teiler von m und $n \bmod m$, d.h. $d \mid m$ und $d \mid n \bmod m$. Wegen $n = \ell \cdot m + (n \bmod m)$ für ein geeignetes $\ell \in \mathbb{N}$ folgt sofort $d \mid n$; $d \mid n$ sowieso.

Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Der erweiterte Algorithmus von Euklid ergibt sich im Wesentlichen durch die Einführung einer Nachberechnung nach erfolgtem Rekursionsaufruf:

Algorithmus:	ERWEITERTER EUKLID
Eingabe:	positive natürliche Zahlen m, n mit $m \leq n$
Ausgabe:	ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(m,n) = mx + ny$

1. IF m teilt n
2. RETURN $(1, 0)$
3. ELSE
4. $(x', y') :=$ ERWEITERTER EUKLID$(\text{mod}(n, m), m)$
5. $x := y' - x' \cdot \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$
6. $y := x'$
7. RETURN (x, y)

Lemma 5.2 *Der Algorithmus* ERWEITERTER EUKLID *berechnet für alle $m, n \in \mathbb{N}_+$ mit $m \leq n$ ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(m,n) = mx + ny$.*

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit Induktion über die Anzahl r rekursiver Aufrufe von ERWEITERTER EUKLID.

- *Induktionsanfang* $r = 0$: Es gilt also $m \mid n$ und folglich $\text{ggT}(m,n) = m = 1 \cdot m + 0 \cdot n$.
- *Induktionsschritt* $r > 0$: Es gilt also $m \nmid n$. Wir definieren $m' =_{\text{def}} n \bmod m$ und $n' =_{\text{def}} m$. Für die Eingaben m' und n' benötigt ERWEITERTER EUKLID einen rekursiven Aufrufe weniger. Nach Induktionsvoraussetzung gilt somit in Zeile (4) des Algorithmus

  $$\text{ggT}(n \bmod m, m) = x' \cdot (n \bmod m) + y' \cdot m$$

  Mit Lemma 5.1 erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
\text{ggT}(m,n) &= x' \cdot (n \bmod m) + y' \cdot m \\
&= x' \cdot \left(n - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \cdot m\right) + y' \cdot m \\
&= \left(y' - x' \cdot \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor\right) \cdot m + x' \cdot n \\
&= x \cdot m + y \cdot n \qquad \text{(wegen Zeile (5) und Zeile (6))}
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Beispiel: Für $m = 2016$ und $n = 22222$ ergeben sich folgende rekursiven Aufrufe für den Algorithmus Erweiterter Euklid:

m	n	x	y
2016	22222	-2899	263
46	2016	263	-6
38	46	-6	5
8	38	5	-1
6	8	-1	1
2	6	1	0

Es gilt also insbesondere $\mathrm{ggT}(2016, 22222) = 2 = (-2899) \cdot 2016 + 263 \cdot 22222$.

Theorem 5.3 *Es seien $a, b, m \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen mit $m \geq 2$ und $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$. Dann besitzt die Gleichung $ax \equiv b \pmod{m}$ genau eine Lösung in $\mathbb{Z}_m$.*

Beweis: Wir beweisen Existenz und Eindeutigkeit der Lösung getrennt.

Zum Nachweis der Existenz einer Lösung sei zunächst $b = 1$. Nach Lemma 5.2 gibt es $x_1, y_1 \in Z$ mit $\mathrm{ggT}(a, m) = 1 = x_1 a + y_1 m$. Wegen $1 = (x_1 + k \cdot m) \cdot a + (y_1 - k \cdot a) \cdot m$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $x_1 \in \mathbb{Z}_m$ annehmen. Somit gilt

$$1 \equiv x_1 a + y_1 m \equiv x_1 a \pmod{m}$$

und x_1 ist eine Lösung. Es sei nun $b \in \mathbb{Z}$ beliebig. Es sei x_1 eine Lösung von $ax \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m)$. Dann gilt

$$b \equiv a x_1 b \equiv a \cdot (x_1 b \bmod m) \pmod{m}$$

und $x_b =_{\mathrm{def}} (x_1 b \bmod m) \in \mathbb{Z}_m$ ist eine Lösung von $ax \equiv b \pmod{m}$.

Für die Eindeutigkeit seien $x_b, x_b' \in \mathbb{Z}_m$ zwei Lösungen von $ax \equiv b \pmod{m}$, $x_b \geq x_b'$. Dann gilt:

$$a(x_b - x_b') \equiv a x_b - a x_b' \equiv b - b \equiv 0 \pmod{m}$$

Mithin gilt $a(x_b - x_b') = \ell \cdot m$ für ein geeignetes $\ell \in \mathbb{Z}$. Wegen $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$ gilt $m \mid x_b - x_b'$ und somit $x_b - x_b' = 0$ bzw. $x_b = x_b'$.

Damit ist das Theorem bewiesen. ∎

Theorem 5.4 (Chinesischer Restsatz) *Es seien Zahlen $b_1, \ldots, b_k, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}_+$ mit $\mathrm{ggT}(m_i, m_j) = 1$ für alle $1 \leq i < j \leq k$ gegeben. Dann gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{Z}_{m_1 \cdot \ldots \cdot m_k}$ mit*

$$x \equiv b_i \pmod{m_i}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Beweis: (*nur für $k = 2$; allgemeiner Fall mittels Induktion über k*) Wir zeigen Existenz und Eindeutigkeit einzeln. Zum Nachweis der Existenz halten wir fest, dass es nach Lemma 5.2 Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit $m_1 x + m_2 y = 1 = \text{ggT}(m_1, m_2)$. Folglich gilt:

$$m_2 y \equiv 1 \pmod{m_1}, \qquad m_1 x \equiv \pmod{m_2}$$

Wir definieren $z =_{\text{def}} ((b_2 m_1 x + b_1 m_2 y) \pmod{m_1 m_2})$ und erhalten

$$\begin{aligned} z &\equiv b_1 m_2 y \equiv b_1 \pmod{m_1} \\ z &\equiv b_2 m_1 x \equiv b_2 \pmod{m_2} \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit sieht man wie im vorangegangen Beweis ein. Damit ist das Theorem bewiesen. ■

5.2 Polynome

Ein (univariates) *Polynom* p ist eine (einstellige) Funktion der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *Koeffizienten* von p heißen. Der *Grad* $\text{grad}(p)$ eines Polynoms ist der größte Index k, für den $a_k \neq 0$ gilt. Das Nullpolynom $p(x) = 0$ besitzt den Grad 0. Im Folgenden betrachten wir Polynome über beliebigen Körpern.

Es sei K ein Körper und es sei x eine Variable, die als Symbol nicht in K vorkommt. Mit $K[x]$ wird die Menge aller Polynome in x mit Koeffizienten in K bezeichnet:

$$K[x] =_{\text{def}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in K \text{ und } (a_n \neq 0 \vee n = 0) \right\}$$

Klarerweise ist $K[x]$ ein Ring mit den üblichen Verknüpfungen der Addition und Multiplikation für Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ und $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, wobei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $n \leq m$ und $a_{n+1} = \cdots = a_m = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} (p+q)(x) &=_{\text{def}} \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) \cdot x^k \\ (p \cdot q)(x) &=_{\text{def}} \sum_{k=0}^{n+m} c_k \cdot x^k \qquad \text{mit } c_k =_{\text{def}} \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot b_{k-j} \text{ und} \\ &\qquad\qquad a_{n+1} = \cdots = a_{n+m} = b_{m+1} = \cdots = b_{n+m} = 0 \end{aligned}$$

Theorem 5.5 *Es seien $p, q \in K[x]$ Polynome mit $q \neq 0$. Dann gibt es Polynome $t, r \in K[x]$ mit*

$$p(x) = t(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \textit{und} \quad r(x) = 0 \textit{ oder } \operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q).$$

Beweis: Gilt $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q)$, so können wir $t(x) =_{\text{def}} 0$ und $r(x) =_{\text{def}} p(x)$ setzen. Für den Fall $\operatorname{grad}(p) \geq \operatorname{grad}(q)$ verwenden wir Induktion über $n = \operatorname{grad}(p)$.

- *Induktionsanfang $n = 0$:* Wegen $0 = \operatorname{grad}(p) \geq \operatorname{grad}(q) \geq 0$ sind p und q konstante Funktionen, d.h., $p(x) = a_0$ und $q(x) = b_0 \neq 0$. Dann können $t(x) = a_0 \cdot b_0^{-1}$ und $r(x) = 0$ gesetzt werden.

- *Induktionsschritt $n > 0$:* Es seien p und q wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0 \\ q(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0 \end{aligned}$$

  mit $m \leq n$. Wir definieren

$$\tilde{p}(x) \;=_{\text{def}}\; p(x) - (a_n \cdot b_m^{-1}) \cdot x^{n-m} \cdot q(x).$$

  Es gilt $\operatorname{grad}(\tilde{p}) < \operatorname{grad}(\text{p})$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Polynome $\tilde{t}$ und $\tilde{r}$ mit $\tilde{p}(x) = \tilde{t}(x) \cdot q(x) + \tilde{r}(x)$. Wir setzen

$$t(x) =_{\text{def}} a_n \cdot b_m^{-1} \cdot x^{n-m} + \tilde{t}(x), \qquad r(x) = \tilde{r}(x).$$

  Dann gilt:

$$\begin{aligned} t(x) \cdot q(x) + r(x) &= \left(a_n \cdot b_m^{-1} \cdot x^{n-m} + \tilde{t}(x)\right) \cdot q(x) + \tilde{r}(x) \\ &= a_n \cdot b_m^{-1} \cdot x^{n-m} \cdot q(x) + \tilde{t}(x) \cdot q(x) + \tilde{r}(x) \\ &= p(x) - \tilde{p}(x) + \tilde{p}(x) \\ &= p(x) \end{aligned}$$

Für die Eindeutigkeit seien $t, \tilde{t}, r, \tilde{r}$ Polynome mit $p = t \cdot q + r = \tilde{t} \cdot q + \tilde{r}$ wie im Theorem angegeben. Somit gilt

$$\left(t - \tilde{t}\right) \cdot q = \tilde{r} - r.$$

Ist $t \neq \tilde{t}$, dann gilt $\operatorname{grad}\left(\left(t - \tilde{t}\right) \cdot q\right) \geq \operatorname{grad}(q) > \operatorname{grad}(\tilde{r} - r)$. Dies ist ein Widerspruch. Mithin gilt $t = \tilde{t}$, also $\left(t - \tilde{t}\right) \cdot q = 0 = \tilde{r} - r$ und es folgt $\tilde{r} = r$. Damit ist das Theorem bewiesen. ∎

Mit obigem Theorem können wir die Teilbarkeit von Polynomen (vergleichbar der modularen Arithmetik für ganze Zahlen) über beliebigen Körpern K definieren:

- $g(x)$ *teilt* $f(x) \iff_{\text{def}}$ es gibt ein $t(x) \in K[x]$ mit $f(x) = t(x) \cdot g(x)$.

- $f(x) \equiv g(x) \pmod{\pi(x)} \iff_{\text{def}} \pi(x)$ teilt $f(x) - g(x)$.

Die Relation $\equiv$ ist für jedes $\pi(x) \in K[x]$, $\pi \neq 0$, eine Äquivalenzrelation. Wir definieren die Restklassen bezüglich $\pi(x)$ als

$$K[x]_{\pi(x)} =_{\text{def}} \{\ f(x) \mid f(x) \in K[x],\ \text{grad}(f) < \text{grad}(\pi)\ \}$$

Beispiele: Die Teilbarkeitsbegriffe sollen an drei Beispielen verdeutlicht werden:

1. Für $K = \mathbb{Z}_3$ und $\pi(x) =_{\text{def}} x^2 + 1$ ergibt sich
$$\mathbb{Z}_3[x]_{\pi(x)} = \{\ 0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\ \}.$$
2. Für $K = \mathbb{Z}_2$ und $\pi(x) =_{\text{def}} x^2 + x + 1$ ergibt sich
$$\mathbb{Z}_2[x]_{\pi(x)} = \{\ 0, 1, x, x+1\ \}$$
und folgende Verknüpfungstabellen für die Addition $+_{\pi(x)}$ und die Multiplikation $\cdot_{\pi(x)}$:

$+_{\pi(x)}$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

$\cdot_{\pi(x)}$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

Insbesondere ist $\mathbb{Z}_2[x]_{\pi(x)} \setminus \{0\}$ eine multiplikative Gruppe und folglich $\langle \mathbb{Z}_2[x]_{\pi(x)}, +_{\pi(x)}, \cdot_{\pi(x)} \rangle$ ein Körper.
3. Für $K = \mathbb{Z}_2$ und $\pi(x) =_{\text{def}} x^2 + 1$ ergibt sich
$$\mathbb{Z}_2[x]_{\pi(x)} = \{\ 0, 1, x, x+1\ \}$$
und folgende Verknüpfungstabellen für die Addition $+_{\pi(x)}$ und die Multiplikation $\cdot_{\pi(x)}$:

$+_{\pi(x)}$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

$\cdot_{\pi(x)}$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	1	$x+1$
$x+1$	0	$x+1$	$x+1$	0

In diesem Fall ist $\mathbb{Z}_2[x]_{\pi(x)} \setminus \{0\}$ bezüglich $\cdot_{\pi(x)}$ keine Gruppe und folglich $\langle \mathbb{Z}_2[x]_{\pi(x)}, +_{\pi(x)}, \cdot_{\pi(x)} \rangle$ auch kein Körper.

Definition 5.6 *Ein Polynom $\pi(x) \in K[x]$ mit $\pi \neq 0$ heißt* irreduzibel *über K, falls für alle Polynome $f(x), g(x) \in K[x]$ gilt:*

$$\pi(x) = f(x) \cdot g(x) \implies \text{grad}(f) = 0 \text{ oder } \text{grad}(g) = 0$$

Anderenfalls heißt $\pi(x)$ reduzibel.

Beispiel: Das Polynome x^2+1 ist irreduzibel über dem Körper $\mathbb{R}$, aber reduzibel sowohl über dem Körper $\mathbb{C}$ (wegen $x^2+1=(x+i)\cdot(x-i)$) als auch über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ (wegen $x^2+1=(x+1)\cdot(x+1)$).

Ohne Beweis geben wir das folgende Theorem an:

Theorem 5.7 *Es seien K ein endlicher Körper und $\pi(x) \in K[x]$ ein Polynom. Dann ist $\langle K[x]_{\pi(x)}, +_{\pi(x)}, \cdot_{\pi(x)} \rangle$ genau dann ein Körper, wenn $\pi(x)$ irreduzibel über K ist.*

Eine *Nullstelle* von $p(x) \in K[x]$ ist ein Element $z_0 \in K$ mit $p(z_0) = 0$.

Theorem 5.8 *Es sei $p \in K[x]$ ein Polynom vom Grad n mit $p \neq 0$. Dann hat p höchstens n Nullstellen in K.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage mittels Induktion über den Grad n.

- *Induktionsanfang $n = 0$:* Wegen $p \neq 0$ und $\text{grad}(p) = 0$ gilt $p(x) = a_0 \neq 0$. Somit hat p genau 0 Nullstellen.
- *Induktionsschritt $n > 0$:* Es sei p ein Polynom vom Grad $n > 0$. Hat p keine Nullstelle, so gilt die Aussage trivialerweise. Hat p mindestens eine Nullstelle $z_0 \in K$, so gibt es nach Theorem 5.5 Polynome $t, r \in K[x]$ mit

  $$p(x) = t(x) \cdot (x - z_0) + r(x)$$

  und $\text{grad}(r) < \text{grad}(x - z_0) = 1$, d.h., $r(x) = r_0$. Wegen $p(z_0) = t(z_0) \cdot (z_0 - z_0) + r_0 = 0$ folgt $r_0 = 0$. Mithin gilt $p(x) = t(x) \cdot (x - z_0)$ und $\text{grad}(t) = n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt t höchstens $n - 1$ Nullstellen in K, somit hat p höchstens n Nullstellen.

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Ein Polynom $p(x) \in K[x]$ vom Grad n heißt *normal*, falls $a_n = 1$ gilt.

Korollar 5.9 *Es seien $p, q \in K[x]$ normale Polynome vom Grad n. Stimmen p und q für n paarweise verschiedene Argumente in K überein, so sind p und q identisch.*

Beweis: Es seien p und q normiert vom Grad n. Weiterhin seien $z_1, \ldots, z_k$ paarweise verschieden mit $p(z_i) = q(z_i)$. Wir betrachten das Polynom $r(x) =_{\text{def}} p(x) - q(x)$. Dann gilt $r(z_i) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, d.h., r besitzt n Nullstellen in den reellen Zahlen. Andererseits gilt jedoch $\text{grad}(r) \leq n - 1$, da p und q normierte Polynome sind. Folglich gilt $r(x) = 0$, d.h., $p = q$. Damit ist das Korollar bewiesen. ■

Korollar 5.10 *Es seien $p, q \in K[x]$ Polynome vom Grad n. Stimmen p und q für $n + 1$ paarweise verschiedene Argumente in K überein, so sind p und q identisch.*

Beweis: Es seien p und q Polynome vom Grad n. Weiterhin seien $z_1, \ldots, z_{n+1}$ paarweise verschieden mit $p(z_i) = q(z_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Wir betrachten die Polynome $\tilde{p}(x) = x^{n+1} + p(x)$ und $\tilde{q}(x) = x^{n+1} + q(x)$. Dann sind $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ normierte Polynome vom Grad $n+1$ und es gilt $\tilde{p}(z_i) = \tilde{q}(z_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Mithin gilt $\tilde{p} = \tilde{q}$, also auch $p = q$. Damit ist das Korollar bewiesen. ■

5.3 Diskrete Fouriertransformation

Gemäss der Definition der Multiplikation zweier Polynome hängen eine lineare Anzahl von Koeffizienten des Produktpolynoms ihrerseits von einer linearen Anzahl von Koeffizienten der gegebenen Polynome ab, insbesondere gilt dies für Koeffizienten n, wenn beide gegebenen Polynome den Grad n besitzen. Damit ergibt sich $O(n^2)$ für die Anzahl der Multiplikation von Koeffizienten. In diesem Abschnitt soll ein verfahren vorgestellt werden, das mit $O(n \log n)$ Multiplikatione n auskommt.

Die Idee für die schnelle Polynommultiplikation basierte auf der unterschiedlichen Repräsentierung von Polynomen p vom Grad $\leq n-1$:

1. Das Polynom p kann durch die Koeffizientenfolge $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ der Länge n mit $p(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ repräsentiert werden.
2. Das Polynom p kann durch n Paare $(z_1, p(z_i)), \ldots, (z_n, p(z_n))$ für paarweise verschiedene Argumente $z_1, \ldots, z_n$ repräsentiert werden.

Hierbei setzen wir nicht voraus, dass die höchsten Koeffizienten des Polynoms p verschieden von Null sind. Die Zahl n kann somit geeignet gewählt werden: Sind p und q zwei Polynome vom Grad m, so ist

$$n =_{\text{def}} \min \left\{ \; 2^k \mid 2^k \geq 2m \; \right\}$$

eine gute Wahl. Die Äquivalenz der beiden Repräsentierungen folgt aus Korollar 5.10.

Für die Koeffizientenfolge $\vec{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ mit $p_{\vec{a}}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ ist die *diskrete Fouriertransformierte* von $\vec{a}$ an der Stelle η definiert als

$$\text{DFT}(\vec{a}, \eta) =_{\text{def}} \left(p_{\vec{a}}(1),\ p_{\vec{a}}(\eta),\ p_{\vec{a}}(\eta^2),\ \ldots,\ p_{\vec{a}}(\eta^{n-1})\right)$$

Für einen Vektor $\vec{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ ist die *inverse diskrete Fouriertransformierte* definiert als

$$\text{IDFT}(\vec{\xi}, \eta) =_{\text{def}} \vec{a} \quad \text{ mit } p_{\vec{a}}(\eta^k) = \xi_k \text{ für } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Unter Verwendung der diskrete Fouriertransformierten kann die Multiplikation von Polynomen auf die komponentenweise Multiplikation einer Folge von Funktionswerte zurückgeführt werden. Dazu sind nur n Multiplikationen nötig. Um insgesamt weniger als $O(n^2)$

Multiplikationen zu erhalten, muss jedoch sichergestellt sein, dass sowohl DFT als IDFT schnell bestimmt werden können. Dies gelingt über die geeignete Wahl von η.

Eine Zahl ω heißt *n-te primitive Einheitswurzel*, falls $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ paarweise verschiedene Nullstellen des Polynoms $x^n - 1$ sind. Klarerweise gibt es in den rellen Zahlen keine n-ten primitiven Einheitswurzeln für $n \geq 3$. Wir müssen also auf komplexe Nullstellen ausweichen.

Eine komplexe Zahl $\omega = x + i \cdot y$ kann (in Polarkoordinaten r, φ) beschrieben werden als

$$\omega = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Als Einheitswurzeln kommen nur komplexen Zahlen ω auf dem Einheitskreis in Frage, d.h., $r = 1$. Unter Verwendung von $i^2 = -1$ und der Potenzreihen für die Kosinus- und Sinusfunktion erhalten wir für komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis

$$\begin{aligned}
\omega &= \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \varphi^{2k}}{(2k)!} \; + \; i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k}}{(2k)!} \; + \; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} \\
&= e^{i\cdot\varphi}
\end{aligned}$$

Mithin gilt $\omega^k = e^{i\cdot k\varphi}$, d.h., eine Potenzierung von ω führt zu einem entsprechenden Vielfachen des Winkels von ω.

Lemma 5.11 *In den komplexen Zahlen ist $\omega = e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}}$ eine n-te primitive Einheitswurzel.*

Beweis: Für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ gilt

$$(\omega^k)^n = \left(\left(e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}}\right)^k\right)^n = e^{i\cdot 2\pi k} = \cos 2\pi k + i \cdot \sin 2\pi k = 1.$$

Weiterhin gilt $\omega^k \neq \omega^j$ für $0 \leq j < k \leq n-1$. Angenommen es gilt $\omega^k = \omega^j$, so folgt $\omega^{k-j} = 1$, d.h.,

$$\cos 2\pi\frac{k-j}{n} \; + \; i \cdot \sin 2\pi\frac{k-j}{n} = 1.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $0 < k - j < n - 1$. Mithin ist ω eine n-te primitive Einheitswurzel. Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Lemma 5.12 *Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine gerade Zahl. Ist ω eine n-te primitive Einheitswurzel, dann ist ω^{-1} eine n-te primitive Einheitswurzel, ω^2 eine $n/2$-te primitive Einheitswurzel und es gilt für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} = 0.$$

Beweis: Wir zeigen die Aussagen einzeln. Mit $(\omega^k)^n = 1$ für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt auch

$$1 = (\omega^{n-k})^n = (\omega^n)^n \cdot (\omega^{-k})^n = 1^n \cdot (\omega^{-k})^n = ((\omega^{-1})^k)^n.$$

Somit ist ω^{-1} eine n-te primitive Einheitswurzel. Mit $(\omega^k)^n = 1$ für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt auch

$$((\omega^2)^m)^{n/2} = (\omega^m)^n = 1$$

für alle $m \in \{1, \ldots, n/2-1\}$. Somit ist ω^2 eine $n/2$-te primitive Einheitswurzel. Weiterhin folgt für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ aus der geometrischen Reihe

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega^k)^j = \frac{(\omega^k)^n - 1}{\omega^k - 1} = 0$$

wegen $(\omega^k)^n = 1$ und $\omega^k \neq 1$. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Die Berechnung der diskreten Fouriertransformierten für n-te primitive Einheitswurzeln erfolgt rekursiv. Im Folgenden sei n stets eine Zweierpotenz. Für $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ definieren wir zwei neue Folgen mit Länge $n/2$:

$$\begin{aligned} \vec{a}_g &=_{\text{def}} (a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{n-2}) \\ \vec{a}_u &=_{\text{def}} (a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{n-1}) \end{aligned}$$

Damit kann $p_{\vec{a}}(x)$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$p_{\vec{a}}(x) = p_{\vec{a}_g}(x^2) + x \cdot p_{\vec{a}_u}(x^2)$$

Wenn nun ω eine n-te primitive Einheitswurzel ist, gilt zunächst $\omega^{n-k} = \omega^k$ und wir erhalten für die Berechnung von $p_{\vec{a}}(\omega^k)$ folgende Vorschrift:

$$p_{\vec{a}}(\omega^k) = \begin{cases} p_{\vec{a}_g}(\omega^{2k}) + \omega^k \cdot p_{\vec{a}_u}(\omega^{2k}) & \text{für } k \in \{0, 1, \ldots, n/2-1\} \\ p_{\vec{a}_g}(\omega^{2k-n}) + \omega^k \cdot p_{\vec{a}_u}(\omega^{2k-n}) & \text{für } k \in \{n/2, \ldots, n-1\} \end{cases}$$

Damit können wir folgenden Algorithmus formulieren:

Algorithmus:	DFT
Eingabe:	$\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, n Zweierpotenz; komplexe Zahl ω
Ausgabe:	$\text{DFT}(\vec{a}, \omega)$

```
1.  IF n = 1
2.      ξ_0 ← a_0
3.  ELSE
4.      ā_g ← (a_0, a_2, ..., a_{n-2})
5.      ā_u ← (a_1, a_3, ..., a_{n-1})
6.      (φ_0, φ_1, ..., φ_{n/2-1}) ← DFT(ā_g, ω^2)
7.      (ψ_0, ψ_1, ..., ψ_{n/2-1}) ← DFT(ā_u, ω^2)
8.      FOR k ← 0 TO n/2 − 1
9.          ξ_k ← φ_k + ω^k · ψ_k
10.         ξ_{k+n/2} ← φ_k + ω^{k+n/2} · ψ_k
11.  RETURN (ξ_0, ..., ξ_{n-1})
```

Für die Laufzeitanalyse von DFT ergibt sich folgende Rekursionsungleichung in Abhängigkeit von $n = 2^k$:

$$\begin{array}{rcll} T(n) & \leq & 2 \cdot T(n/2) + c \cdot n + c' & \text{für } n \geq 2 \text{ und geeignete Konstanten } c, c' > 0 \\ T(1) & = & c'' & \end{array}$$

Mittels vollständiger Induktion über k (!) kann

$$T(n) \leq d \cdot n \log n + d'$$

für geeignete Konstanten $d, d' > 0$ gezeigt werden.

Die Berechnung der inversen diskrete Fouriertransformierten stützt sich auf folgendes Lemma.

Lemma 5.13 *Es seien $\vec{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ eine Vektor komplexer Zahlen mit $n \geq 1$ und ω eine n-te primitive Einheitswurzel. Dann gilt*

$$\mathrm{IDFT}(\vec{\xi}, \omega) = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{DFT}(\vec{\xi}, \omega^{-1}).$$

Beweis: Es bezeichne $\vec{\varphi} = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}) =_{\mathrm{def}} \frac{1}{n} \cdot \mathrm{DFT}(\vec{\xi}, \omega^{-1})$. Für die Gleichheit $\vec{\varphi} = \mathrm{IDFT}(\vec{\xi}, \omega)$ müssen wir

$$p_{\vec{\varphi}}(\omega^k) = \xi_k$$

für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ zeigen. Nach der Definition der diskrete Fouriertransformierten $\mathrm{DFT}(\vec{\xi}, \omega^{-1})$ gilt

$$\varphi_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \cdot ((\omega^{-1})^k)^j.$$

Mithin erhalten wir

$$\begin{aligned}
p_{\vec{\varphi}}(\omega^k) &= \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j \cdot \omega^{kj} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{r=0}^{n-1} \xi_r \cdot (\omega^{-j})^r \right) \cdot \omega^{kj} \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \xi_r \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-jr} \omega^{kj} \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \xi_r \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (\omega^{k-r})^j \\
&= \frac{1}{n} \cdot \xi_k \cdot \sum_{j=0}^{n-1} 1 \qquad \text{(wegen Lemma 5.12 für } k \neq r\text{)} \\
&= \xi_k
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Theorem 5.14 *Das Produkt zweier Polynome vom Grad höchstens n kann in der Zeit $O(n \log n)$ berechnet werden.*

Literaturverzeichnis

[GKP94] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth und Oren Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. 2. Auflage. Addison-Wesley Longman, Amsterdam, 1994.

[KP09] Bernd Kreußler und Gerhard Pfister. *Mathematik für Informatiker*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[MM06] Christoph Meinel und Martin Mundhenk. *Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen. Eine Einführung*. 3., überarbeitete und erweiterte Auflage. B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006.

[Ste07] Angelika Steger. *Diskrete Strukturen. Band 1: Kombinatorik-Graphentheorie-Algebra*. 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[SS02] Thomas Schickinger und Angelika Steger. *Diskrete Strukturen. Band 2: Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[Wag03] Klaus W. Wagner. *Theoretische Informatik. Eine kompakte Einführung*. 2. überarbeitete Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[WHK04] Manfred Wolff, Peter Hauck und Wolfgang Küchlin. *Mathematik für Informatik und Bioinformatik*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Wil05] Herbert S. Wilf. *generatingfunctionology*. 3. Auflage. CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.