Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
PD Dr. Sven Kosub / Dr. Maciej Gratkowski

1. Übungsblatt

Ausgabe: 18.04.2013 **Abgabe:** 26.04.2013, bis spätestens 06:00 per Mail an den Tutor

Aufgabe 1: Dyadische Kodierung 10 Punkte

(a) Sie sollen nachweisen, dass sich jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ in genau einer Weise als $n = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 2^i$ mit $m \geq 0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \{1, 2\}$ darstellen lässt.

Zeigen Sie dazu die beiden folgende Aussagen:

i. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ gibt es $m \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \{1, 2\}$ mit $n = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 2^i$.

ii. Aus

$$n = \sum_{i=0}^{m_1} a_i \cdot 2^i = \sum_{i=0}^{m_2} b_i \cdot 2^i$$

mit $m_1, m_2 \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \ldots, a_{m_1}, b_0, b_1, \ldots, b_{m_2} \in \{1, 2\}$ folgt

$$m_1 = m_2,\ a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{m_1} = b_{m_2}.$$

Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion über n.

(b) Geben Sie einfache Regeln an, um aus der Binärdarstellung einer natürlichen Zahl deren dyadische Darstellung zu gewinnen und umgekehrt.

Begründen Sie Ihre Regeln.

Aufgabe 2: Hüllenoperatoren 10 Punkte

Wie in der Vorlesung sei für $\mathbb{N}$ und die Teilbarkeitsrelation $|$ der Operator $\Gamma^{|} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ wie folgt für jedes $B \subseteq \mathbb{N}$ gegeben:

$$\Gamma^{|}(B) =_{\text{def}} \{\ n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und es gibt ein } m \in B \text{ mit } n|m\ \}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Gamma^{|}$ ein Hüllenoperator auf $\mathbb{N}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Gamma^{|}$ ein algebraischer Hüllenoperator auf $\mathbb{N}$ ist. Geben Sie dazu geeignete Operationen $O_1, \ldots, O_k$ auf $\mathbb{N}$ an, sodass $\Gamma^{|} = \Gamma_{O_1,\ldots,O_k}$ gilt.

Aufgabe 3: Algebraische Erzeugung von Funktionen 10 Punkte

(a) Um welche Funktion handelt es sich bei $\mathrm{ID}(\mathrm{ZV}(\mathrm{SUB}(\mathrm{md}, \mathrm{md})))$?

(b) Für $n, m \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq m$ sei die Funktion $\mathrm{I}_m^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definiert als

$$I_m^n(x_1, \ldots, x_n) =_{\text{def}} x_m.$$

Zeigen Sie $\Gamma_{\mathrm{ZV,LV,ID,SUB}}(\{\mathrm{I}_1^2\}) \subseteq \{\ \mathrm{I}_m^n \mid m \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$.