

## 11. Übungsblatt

**Ausgabe:** 27.06.2013    **Abgabe:** 05.07.2013, bis spätestens 08:00 per Mail an den Tutor

### Aufgabe 1: Laufzeit von Algorithmen

10 Punkte

- (a) Geben Sie eine 1-Turingmaschine mit möglichst geringer Laufzeit an, die die Funktion

$$f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^* : x \mapsto aaxbb$$

berechnet. Bestimmen Sie die Laufzeit so genau wie möglich.

- (b) Geben Sie ein RIES-Programm ohne Verwendung von  $*$  und  $:$  an, das die Division, also die Funktion  $\text{div}$ , in der Zeit  $O(n)$  berechnet. Bestimmen Sie die Laufzeit genau.

### Aufgabe 2: Abschlusseigenschaften von $\mathbf{FP}$

10 Punkte

Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a)  $\mathbf{FP}$  ist abgeschlossen unter  $ZV$ , d.h. mit  $f \in \mathbf{FP}$  gilt auch  $ZV(f) \in \mathbf{FP}$ .
- (b)  $\mathbf{FP}$  ist abgeschlossen unter  $LV$ , d.h. mit  $f \in \mathbf{FP}$  gilt auch  $LV(f) \in \mathbf{FP}$ .
- (c)  $\mathbf{FP}$  ist abgeschlossen unter  $ID$ , d.h. mit  $f \in \mathbf{FP}$  gilt auch  $ID(f) \in \mathbf{FP}$ .
- (d)  $\mathbf{FP}$  ist abgeschlossen unter  $SUB$ , d.h. mit  $f, g \in \mathbf{FP}$  gilt auch  $SUB(f, g) \in \mathbf{FP}$ .
- (e)  $\mathbf{FP}$  ist nicht abgeschlossen unter  $PR$ , d.h. es gibt  $f, g \in \mathbf{FP}$  mit  $PR(f, g) \notin \mathbf{FP}$ .

*Hinweis:* Verwenden Sie bei Teilaufgabe (e), dass  $\text{exp} \notin \mathbf{FP}$  gilt.

### Aufgabe 3: Die Klasse $\mathbf{P}$

10 Punkte

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge  $\{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{N} \text{ und } x^y = z \}$  in  $\mathbf{P}$  liegt.
- (b) Zeigen Sie, dass eine totale Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  genau dann in  $\mathbf{FP}$  liegt, wenn ein Polynom  $p$  mit  $|f(x)| \leq p(|x|)$  für alle  $x \in \mathbb{N}$  existiert und  $\{ (x, y) \mid y \leq f(x) \} \in \mathbf{P}$  gilt.