

## 2. Übungsblatt

**Ausgabe:** 25.04.2013    **Abgabe:** 03.05.2013, bis spätestens 08:00 per Mail an den Tutor

### Aufgabe 1: Algebraische Erzeugung von Funktionen

10 Punkte

- (a) Es seien die Funktionen  $\psi_1, \psi_2, \psi_3 : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  und  $\varphi : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$  gegeben. Zeigen Sie, dass  $\text{SIM}_3(\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \Gamma_{ZV, LV, ID, SUB}(\{\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3\})$  gilt.

Geben Sie dazu eine exakte Operationenfolge an (siehe Beweis von Lemma 1.2 im Skriptum).

- (b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Gamma_{ZV, LV, ID, SUB}(\{I_1^1, \text{sum}\}) = \left\{ f \mid \text{es gibt } n, a_1, \dots, a_n \geq 1 \text{ mit } f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\}$$

Hierbei steht  $I_1^1$  für die einstellige Identitätsfunktion.

### Aufgabe 2: Random-Access-Maschinen

10 Punkte

- (a) Geben Sie eine RAM an, die die durch

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor =_{\text{def}} \text{ das größte } z \in \mathbb{N} \text{ mit } z^2 \leq x$$

definierte Funktion berechnet.

*Hinweis:* Verwenden Sie, dass  $\sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2$  für alle  $k \geq 0$  gilt.

- (b) Geben Sie eine RAM an, die die Funktion  $\text{div}$  berechnet.

### Aufgabe 3: RAM-Berechenbarkeit

10 Punkte

- (a) Welche  $n$ -stelligen Funktionen werden durch die Multiplikations-RAM aus der Vorlesung (siehe erstes Beispiel im Abschnitt 2.1) für  $n \in \{0, 1, 3, 4, 5\}$  jeweils berechnet?

*Hinweis:* Je nach Startkonfiguration kann sich eine RAM (also ein und dasselbe Programm) anders verhalten.

(b) Welche einstellige Funktion wird durch das folgende RAM-Programm berechnet?

```
0  R2 ← 1
1  R1 ← R0
2  R0 ← 0
3  IF R1 = 0 GOTO 8
4  R1 ← R1 - R0
5  R0 ← R0 + R2
6  R1 ← R1 - R0
7  GOTO 3
```