Einführung in die Informatik 2

– Strukturelle Induktion –

Sven Kosub

AG Algorithmik/Theorie komplexer Systeme
Universität Konstanz

E 202 | Sven.Kosub@uni-konstanz.de | Sprechstunde: Freitag, 12:30-14:00 Uhr, o.n.V.

Sommersemester 2009

Vollständige Induktion: einfachste Struktur

Problem:

Wie weisen wir nach, dass alle natürlichen Zahlen eine bestimmte Eigenschaft E besitzen bzw. die Aussage $E(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?

Vollständige Induktion (von $n-1$ nach n)

(IA) (Induktionsanfang) Gilt $E(0)$ und

(IS) (Induktionsschritt) folgt für alle $n > 0$ die Aussage $E(n)$ aus der Tatsache, dass $E(n-1)$ gilt (Induktionsvoraussetzung),

so gilt $E(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion: Geometrische Reihe

Wollen mittels vollständiger Induktion zeigen:

Für alle reellen Zahlen $q > 0$ mit $q \neq 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Definiere $a_n =_{\mathrm{def}} \sum_{i=0}^{n} q^i$

(IA) Für $n = 0$ gilt $a_0 = 1 = \frac{q^{0+1}-1}{q-1}$ (für $q \neq 1$)

(IS) Für $n > 0$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + q^n && \text{(nach Definition von } a_n\text{)} \\ &= \frac{q^{(n-1)+1}-1}{q-1} + q^n && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \frac{q^n-1+(q-1)q^n}{q-1} = \frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \end{aligned}$$

Vollständige Induktion: etwas kompliziertere Struktur

Problem:

Wie weisen wir nach, dass alle natürlichen Zahlen eine bestimmte Eigenschaft E besitzen bzw. die Aussage $E(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?

Vollständige Induktion von $1, \ldots, n-1$ nach n

Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

(IA) (Induktionsanfang) für alle $n \leq n_0$ gilt $E(n)$ und

(IS) (Induktionsschritt) für alle $n > n_0$ folgt die Aussage $E(n)$ aus der Tatsache, dass $E(m)$ für alle $m < n$ gilt (Induktionsvoraussetzung),

so gilt $E(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion: Fibonacci-Zahlen

Definiere $F_0 =_{\text{def}} 1$, $F_1 =_{\text{def}} 2$ und $F_n =_{\text{def}} F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 1$

Die ersten Zahlen sind $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

Problem: Wollen zeigen, dass $F_n \geq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$ gilt

Beweis mittels vollständiger Induktion ($n_0 = 1$):

(IA) Es gilt $F_0 = 1 \geq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^0$ und $F_1 = 2 \geq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^1$

(IS) Für $n > 1$ gilt

$$\begin{aligned}
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} && \text{(nach Definition von } F_n\text{)} \\
&\geq \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1\right) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Verallgemeinerung des Induktionsprinzips

Problem:

Wie weisen wir nach, dass alle Elemente a einer Menge D eine bestimmte Eigenschaft E besitzen bzw. die Aussage $E(a)$ für alle $a \in D$ gilt?

Zutaten:

- D muss „geordnet" werden können (Hüllenoperator)
- D muss endlich erzeugbar sein (algebraischer Hüllenoperator)

Hüllenoperator

Es sei A eine beliebige Menge.

Eine totale Funktion $\Gamma : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ heißt Hüllenoperator gdw. folgende Eigenschaften sind erfüllt:

1. Für alle $B \subseteq A$ gilt $B \subseteq \Gamma(B)$ (Einbettung)
2. Für alle $B, C \subseteq A$ gilt: Ist $B \subseteq C$, so ist $\Gamma(B) \subseteq \Gamma(C)$ (Monotonie)
3. Für alle $B \subseteq A$ gilt $\Gamma(\Gamma(B)) = \Gamma(B)$ (Abgeschlossenheit)

Ist $(A, \leq)$ eine reflexive und transitive Relation, so ist durch

$$\Gamma^{\leq}(B) =_{\text{def}} \{\ a \in A \mid \text{es existiert ein } b \in B \text{ mit } b \leq a\ \}$$

ein Hüllenoperator $\Gamma^{\leq}$ auf A definiert

Algebraische Hüllenoperatoren (I)

Es sei A eine beliebige Menge.

Es sei $O : A^s \to A$ eine s-stellige Operation auf A.

Eine Menge $C \subseteq A$ heißt abgeschlossen unter O gdw. mit $a_1, \ldots, a_s \in C$ ist stets auch $O(a_1, \ldots, a_s) \in C$.

Für $i \in \{1, \ldots, k\}$ seien $O_i : A^{s_i} \to A$ Operationen auf A.

Definiere für alle $B \subseteq A$ die Menge $\Gamma_{O_1,\ldots,O_k}(B)$ wie folgt:

1. Alle Elemente von B gehören zu $\Gamma_{O_1,\ldots,O_k}(B)$
2. Sind $a_1, \ldots, a_{s_i} \in \Gamma_{O_1,\ldots,O_k}(B)$ und ist $O_i(a_1, \ldots, a_{s_i})$ definiert, so gehört auch $O_i(a_1, \ldots, a_{s_i})$ zu $\Gamma_{O_1,\ldots,O_k}(B)$
3. Weitere Elemente gehören nicht zu $\Gamma_{O_1,\ldots,O_k}(B)$

Algebraische Hüllenoperatoren (II)

Fakten:

- $\Gamma_{O_1,\dots,O_k}(B)$ ist die kleinste Menge (bzgl. Mengeninklusion), die B enthält und abgeschlossen unter den Operationen $O_1, \dots, O_k$ ist
- $\Gamma_{O_1,\dots,O_k}$ ist ein Hüllenoperator

$\Gamma_{O_1,\dots,O_k}$ heißt der durch die Operationen $O_1, \dots, O_k$ definierte algebraische Hüllenoperator über A.

- $\Gamma_{\cap,\cup}$, $\Gamma_{\cap,-}$, $\Gamma_{\cup,-}$, $\Gamma_{\cap,\cup,-}$ sind algebraische Hüllenoperatoren über $\mathcal{P}(A)$.
- Γ_{+}, $\Gamma_{\times}$, $\Gamma_{+,\times}$ sind algebraische Hüllenoperatoren über $\mathbb{N}$
- Für totale Ordnung $(\mathbb{R}, \leq)$ ist der Hüllenoperator $\Gamma^{\leq}$ nicht algebraisch

Induktive Definition

Häufige Situation:

Definiere eine Menge $D =_{\text{def}} \Gamma_{O_1,\dots,O_k}(B)$ für geeignete Operationen $O_1, \dots, O_k$ über A und geeignetes $B \subseteq A$

In diesem Fall wird nicht der ganze Hüllenoperator benötigt

Induktives Definieren in diesem Fall:

(IA) Lege Menge B fest mit $B \subseteq D$

(IS) Lege der Reihe nach Operationen $O_1, \dots, O_k$ fest mit $O_i(a_1, \dots, a_{s_i}) \in D$ für alle $a_1, \dots, a_{s_i} \in D$

Wir definieren die Menge der vollen, gewurzelten Binärbäume:

(IA) Für jedes r ist $(\{r\}, \emptyset, r)$ ein voller, gewurzelter Binärbaum

(IS) Sind (V, E, r) und (V', E', r') volle, gewurzelte Binärbäume mit $V \cap V' = \emptyset$, so ist $(V \cup V' \cup \{s\}, E \cup E' \cup \{(r, s), (r', s)\}, s)$ für $s \notin V \cup V'$ ein voller, gewurzelter Binärbaum

Strukturelle Induktion

Problem:

Wie weisen wir nach, dass alle Elemente a einer Menge D eine bestimmte Eigenschaft E besitzen bzw. die Aussage $E(a)$ für alle $a \in D$ gilt?

strukturelles Induktionsprinzip

Es sei $D = \Gamma_{O_1,\ldots,O_k}(B)$ durch die Operationen $O_i : A^{s_i} \to A$ aus der Menge $B \subseteq A$ erzeugt (bzw. geeignet induktiv definiert).

Gilt

(IA) (Induktionsanfang) $E(a)$ für alle $a \in B$ und

(IS) (Induktionsschritt) aus $E(a_1), \ldots, E(a_{s_i})$ folgt $E(O_i(a_1, \ldots, a_{s_i}))$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $a_1, \ldots, a_{s_i} \in A$,

so gilt $E(a)$ für jedes $a \in D$.

Beispiel: Anzahl innerer Knoten in vollen Binärbäumen

Problem:

Wollen zeigen, dass jeder volle, gewurzelte Binärbaum T mit n Blättern genau $n-1$ innere Knoten besitzt

Verwenden strukturelles Induktionsprinzip:

(IA) Ist $T = (\{r\}, \emptyset, r)$, so besteht T nur aus einem Blatt r; also hat T keinen inneren Knoten

(IS) Ist T Baum mit mehr als einem Knoten, dann ist der Definition gemäß aus vollen, gewurzelten Binärbäumen T' und T'' zusammengesetzt

Dann gilt:

- $n = n' + n''$, wobei n, n', n'' Anzahl der Blätter von T, T' bzw. T'' sind
- mit m, m', m'' als Anzahl innerer Knoten von T, T' bzw. T''

$$\begin{aligned} m &= 1 + m' + m'' && \text{(die 1 für die neue Wurzel von } T\text{)} \\ &= 1 + (n'-1) + (n''-1) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= (n'+n'') - 1 \ = \ n-1 \end{aligned}$$