Einführung in die Informatik 2

– Mathematische Grundbegriffe –

Sven Kosub

AG Algorithmik/Theorie komplexer Systeme
Universität Konstanz

E 202 | Sven.Kosub@uni-konstanz.de | Sprechstunde: Freitag, 12:30-14:00 Uhr, o.n.V.

Sommersemester 2009

Mengen

- (mathematischer) Begriff der Menge fundamental für nahezu alle Gebiete der Informatik
- verwenden intuitiven Mengenbegriff (daher auch „naive Mengenlehre“)
- Menge nach Georg Cantor (1895):

  Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

- Wieso naiv?
  - Was ist die „die Menge aller Mengen“?
  - Was ist „die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“?
  - Ausweg: Typentheorie (Russell), axiomatische Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel-Axiome)

Mengen

Darstellung von Mengen

- extensional: Angabe aller Elemente der Menge

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

- intensional: Angabe eines definierenden Ausdrucks E

$$\{x \mid E(x)\}$$

- $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $\{x \mid x$ ist eine natürliche Zahl und x ist ungerade und $x < 10\}$

- Menge, die kein Element enthält, heißt leere Menge und wird mit $\varnothing$ bezeichnet

Mengen

- bei extensionaler Darstellung spielt Reihenfolge der Elemente keine Rolle, d.h.

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{und} \quad \{5, 7, 3, 1, 9\}$$

  beschreiben dieselbe Menge

  sonst: Folgen oder Tupel

- Anzahl des Vorhandenseins eines Elementes irrelevant, d.h.

$$\{1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 9, 9, 9\}$$

  beschreibt auch dieselbe Menge

  sonst: Multimenge

Mengen

- $e \in A$ steht für „Objekt e ist Element von A“
- Anzahl der Elemente von A heißt Mächtigkeit bzw. Kardinalität von A, symbolisch: $\|A\|, |A|, \#A$

  beachte: mehrfach dargestellte Element werden nur einmal gezählt, d.h.

$$\|\{1,3,3,1,5,5,7,5,9,3,9,9,7\}\| = 5$$

- leere Menge hat Kardinalität 0, d.h. $\|\varnothing\| = 0$

Mengen

Mengenvergleiche:

- $A \subseteq B$ steht für: A ist Teilmenge von B, d.h. jedes Element von A ist Element von B
- $A = B$ steht für: A und B sind gleich, d.h. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$
- $A \subset B$ steht für: A ist echte Teilmenge von B, d.h. $A \subseteq B$, aber A und B sind nicht gleich

negative Mengenvergleiche:

- $A \not\subseteq B$ steht für: A ist keine Teilmenge von B, d.h. mindestens ein Element von A ist nicht Element von B
- $A \neq B$ steht für: A und B sind nicht gleich, d.h. $A \not\subseteq B$ oder $B \not\subseteq A$
- $A \not\subset B$ steht für: A ist keine echte Teilmenge von B, d.h. $A \not\subseteq B$ oder $A = B$
- $e \notin A$ steht für: e ist nicht Element von A

Mengen

Potenzmenge von A:

- Menge aller Teilmengen von A, symbolisch: $\mathcal{P}(A), 2^A$
- $B \in \mathcal{P}(A)$ genau dann, wenn $B \subseteq A$

Fakten:

- Es gilt stets $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ und $A \in \mathcal{P}(A)$
- Ist A endlich, so gilt $\|\mathcal{P}(A)\| = 2^{\|A\|}$

Für $A = \{0, 1\}$ gilt $\mathcal{P}(A) = \big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\big\}$.

Mengen

Grundlegende Operationen auf Mengen A und B:

- Vereinigung: $A \cup B =_{\text{def}} \{e \mid e \in A \text{ oder } e \in B\}$
- Durchschnitt: $A \cap B =_{\text{def}} \{e \mid e \in A \text{ und } e \in B\}$
- Differenz: $A \setminus B =_{\text{def}} \{e \mid e \in A \text{ und } e \notin B\}$

- $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$
- $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$
- $\{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$

- bezüglich fester Grundmenge M wird $\overline{A}$ für $M \setminus A$ verwendet
- de Morgan'sche Regeln:

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

- A und B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt

Mengen

- $A \times B =_{\text{def}} \{(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$ heißt (kartesisches) Produkt von A und B
- $A_1 \times \cdots \times A_n =_{\text{def}} \{(a_1,\ldots,a_n) \mid a_i \in A_i\}$ heißt verallgemeinertes Produkt von $A_1 \ldots, A_n$
- Elemente des Produktes von n Mengen heißen n-Tupel
- spezielle Bezeichnung für n-Tupel:
  - Paare für $n = 2$
  - Tripel für $n = 3$
  - Quadrupel für $n = 4$

Fakt: Für endliche Mengen $A_1, \ldots, A_n$ gilt

$$\|A_1 \times \cdots \times A_n\| = \|A_1\| \cdot \cdots \cdot \|A_n\|$$

Relationen

- Jede Teilmenge $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ heißt Relation
- Relationen modellieren Beziehungen zwischen Objekten
- Relationen werden oft als Tabellen dargestellt

Für $A_1 = \{a, b, c\}$, $A_2 = \{1, 2\}$ und $A_3 = \{\%, \$\}$ könnte Relation gegeben sein als:

a	1	%
a	1	$
b	2	$

- binäre Relationen, d.h. zweistellige Relation, werden als Graphen dargestellt

Ordnungen

- binäre Relationen über Grundmenge A können zum Ordnen von A verwendet werden
- $R \subseteq A \times A$ heißt Halbordnung (partielle Ordnung), falls für beliebige Elemente $a, b, c \in A$ gilt
  - Reflexivität: $(a, a) \in R$
  - Transitivität: wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann ist $(a, c) \in R$
  - Antisymmetrie: wenn $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$, dann ist $a = b$
- Halbordnung $R \subseteq A \times A$ heißt Ordnung (totale Ordnung, lineare Ordnung), falls zusätzlich gilt
  - Totalität: $(a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$
- für Halbordnung R schreiben wir Paare $(a, b) \in R$ auch als $a \leq_R b$
- für Halbordnung $R \subseteq A \times A$ heißt $(A, \leq_R)$ partiell geordnete Menge
- für Ordnung $R \subseteq A \times A$ heißt $(A, \leq_R)$ total geordnete Menge

Ordnungen

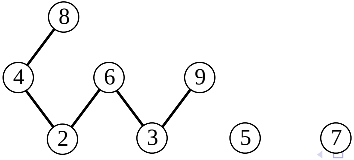
- $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathbb{N}, \leq)$ sind total geordnete Mengen
- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ ist für alle Mengen A eine partiell geordnete Menge
- Auf $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ betrachten wir die Relation

$$R =_{\text{def}} \{(x,y) \mid (x,y) \in A \text{ und } x \text{ teilt } y \}$$

Dann ist R eine Halbordnung mit folgender Extension:

$$\begin{aligned} R \;=\; \{ & (2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6),(3,9), \\ & (4,4),(4,8),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9) \} \end{aligned}$$

Darstellung als Hasse-Diagramm



Äquivalenzrelationen

- Relation $R \subseteq A \times A$ heißt symmetrisch, falls für alle $a, b \in A$ gilt: Ist $(a, b) \in R$, so ist auch $(b, a) \in R$
- beachte: antisymmetrisch ist nicht die Negation von symmetrisch
- Relation heißt Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist

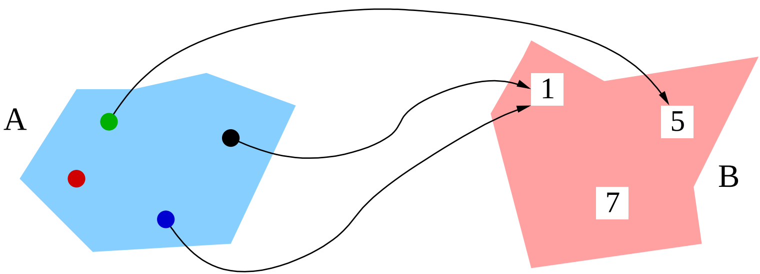
Erreichbarkeitsrelation auf ungerichteten Graphen ist Äquivalenzrelation:

- Reflexivität: jeder Knoten erreicht sich selbst über einen Weg der Länge 0
- Transitivität: gibt es Weg von Knoten u zu Knoten v und gibt es Weg von Knoten v zu Knoten w, so gibt es auch Weg von Knoten u zu Knoten w
- Symmetrie: gibt es Weg von u nach v, so gibt es Weg von v nach u durch Umkehrung der Kantentraversierung

Funktionen

- binäre Relation $R \subseteq A \times B$ heißt
  - rechtseindeutig, falls für jedes $a \in A$ höchstens ein $b \in B$ mit $(a, b) \in R$ existiert
  - linkseindeutig, falls für jedes $b \in B$ höchstens ein $a \in A$ mit $(a, b) \in R$ existiert
- rechtseindeutige Relation f über $A \times B$ wird als Funktion von A nach B bezeichnet
- Notation: $f : A \to B$ statt $f \subseteq A \times B$
- Notation: $f(a) = b$ statt $(a, b) \in f$
- A heißt Definitionsbereich von f
- B heißt Bildbereich von f

Funktionen



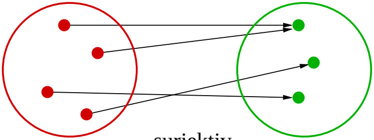
f(●)=5 f(●)=1 f(●)=1

Eigenschaften von Funktionen:

- $f : A \to B$ heißt total, falls jedem Element $a \in A$ ein „Bild“ $b \in B$ durch f zugeordnet wird
- $f : A \to B$ heißt partiell, falls es Elemente ohne Bilder gibt
- manchmal heißen totale Funktionen einfach Funktionen und partielle Funktionen Abbildungen
- $f : A \to B$ heißt surjektiv, falls jedes Element von B Bild eines Elementes a ist
- $f : A \to B$ heißt injektiv, falls f auch linkseindeutig ist
- $f : A \to B$ heißt bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist (Beachte: Für bijektive Funktionen existiert eine Umkehrabbildung)

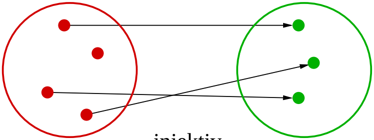
Funktionen

total



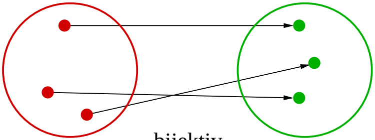
surjektiv

partiell



injektiv

total



bijektiv

Fakt:

Es sei $f : A \to B$ eine Funktion mit $\|A\| = \|B\| < \infty$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist bijektiv.
2. f is surjektiv.
3. f ist injektiv.

Wieso?

Asymptotik von Funktionen

- Asymptotik beschreibt das Verhalten von Funktionen im Unendlichen
- asymptotisches Wachstum von Funktionen wird durch die Landau-Symbole $O, o, \Omega, \omega, \Theta$ ausgedrückt
- Landau-Symbole definieren binäre Relationen auf Funktionen

Im Folgenden betrachten wir totale Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$

Asymptotik von Funktionen

- $f \in O(g) \iff_{\text{def}}$ es gibt $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f(n) \leq c \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt (*f* wächst höchstens so schnell wie *g*)
- $f \in \Omega(g) \iff_{\text{def}}$ es gibt $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f(n) \geq c \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt (*f* wächst mindestens so schnell wie *g*)
- $f \in o(g) \iff_{\text{def}}$ für alle $c > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f(n) < c \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt (*f* wächst langsamer als *g*)
- $f \in \omega(g) \iff_{\text{def}}$ für alle $c > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f(n) > c \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt (*f* wächst schneller als *g*)
- $f \in \Theta(g) \iff_{\text{def}} f \in O(g) \cap \Omega(g)$ (*f* wächst genauso schnell wie *g*)

Asymptotik von Funktionen

- $4n + 9996 \in O(n^2)$ mittels $c = 1$ und $n_0 = 102$ (oder $c = 2$ und $n_0 = 72$ oder ...)
- $100n^5 + 200n^4 + n^3 + 1000357n^2 + 7n + 33 = O(n^5)$ mittels $c = 1000400$ und $n_0 = 1$
- $\log^{k+1} n = \Omega(\log^k n)$ mittels $c = 1$ und $n_0 = 1$
- $n^k \in o(n^{k+1})$ mittels $n_0 = \lceil \frac{1}{c} \rceil$ für $c > 0$
- $\log n^k \in \Theta(\log n^{k+1})$
- $3^n \in \omega(2^n)$
- $\max\{0, (-1)^n \cdot n^3\}$ und n^2 sind unvergleichbar

- oft wird $f = O(g)$ an Stelle von $f \in O(g)$ geschrieben
- aber Vorsicht: $f = O(g)$ bedeutet nicht $g = O(f)$
- $f = o(g)$ äquivalent zu $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$